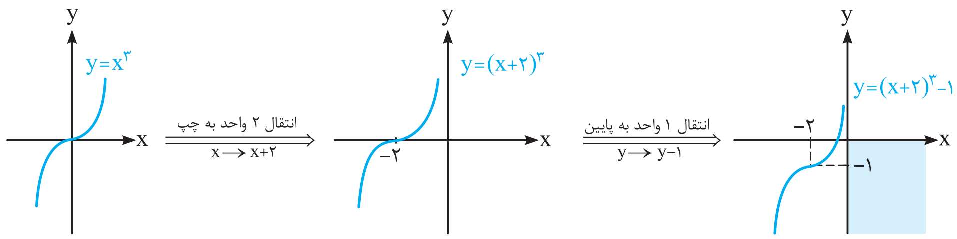
پاسخ تشریحی

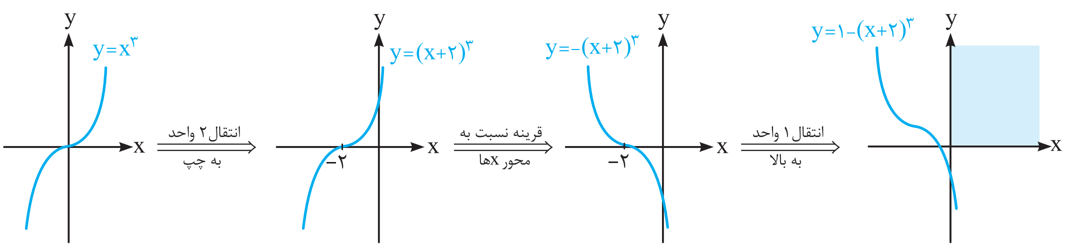
۱ ۴



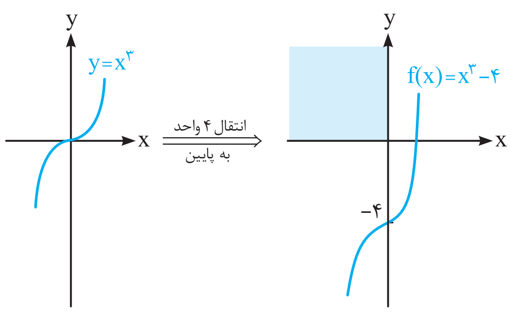
۲ ۳

دامنهٔ تمام توابع چندجمله‌ای $\mathbb{R}$ است. هم‌چنین برد تمام توابع چندجمله‌ای از درجهٔ فرد برابر $\mathbb{R}$ می‌باشد. پس گزینهٔ (۲) صحیح و گزینـهٔ (۳) نادرست است. با رسم توابع $f(x)$ و $g(x)$ می‌توان درستی گزینه‌های (۱) و (۴) را نیز نشان داد:

رسم $g(x)$:



رسم $f(x)$:



۳ ۳

بررسی گزینه‌ها:

$$۱)\ y=(x-۱)^۳ \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محورxها}} y=-(x-۱)^۳ \xrightarrow[x\to -x]{\text{قرینه نسبت به محورyها}} y=-(-x-۱)^۳ \Rightarrow y=(x+۱)^۳ \quad ✗$$

$$۲)\ y=(x+۱)^۳ \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محورxها}} y=-(x+۱)^۳ \xrightarrow[x\to -x]{\text{قرینه نسبت به محورyها}} y=-(-x+۱)^۳ \Rightarrow y=(x-۱)^۳ \quad ✗$$

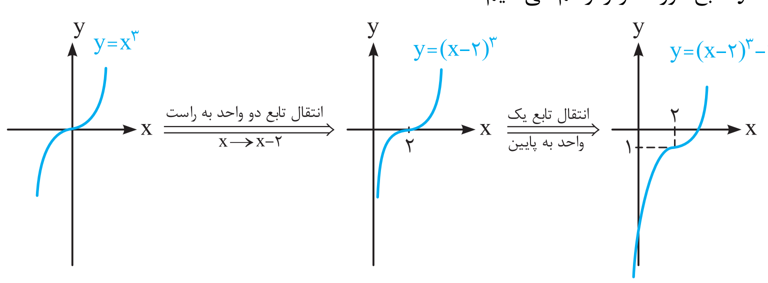
$$۳)\ y=x^۳ \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محورxها}} y=-x^۳ \xrightarrow[x\to -x]{\text{قرینه نسبت به محورyها}} y=-(-x)^۳ \Rightarrow y=x^۳ \quad ✓$$

$$۴)\ y=x^۲ \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محورxها}} y=-x^۲ \xrightarrow[x\to -x]{\text{قرینه نسبت به محورyها}} y=-(-x)^۲ \Rightarrow y=-x^۲ \quad ✗$$

۴ ۲

$$y=x^۳-۶x^۲+۱۲x-۹=x^۳-۶x^۲+۱۲x-۸-۱=(x-۲)^۳-۱$$

حال به کمک نمودار $y=x^۳$ تابع موردنظر را رسم می‌کنیم:



همان‌طور که مشخص است، این نمودار از ناحیهٔ دوم عبور نمی‌کند.

۵ ۴

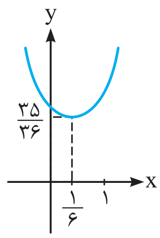
$$(g+f)(x)=g(x)+f(x)=-\left(x-\frac{1}{3}\right)^3-\frac{28}{27}+x^3+2=-\left(x^3-x^2+\frac{1}{3}x-\frac{1}{27}\right)-\frac{28}{27}+x^3+2$$

$$=-\cancel{x^3}+x^2-\frac{1}{3}x+\underbrace{\frac{1}{27}-\frac{28}{27}}_{-1}+\cancel{x^3}+2=x^2-\frac{1}{3}x+1$$

برای رسم این تابع نقطهٔ رأس آن را می‌یابیم:

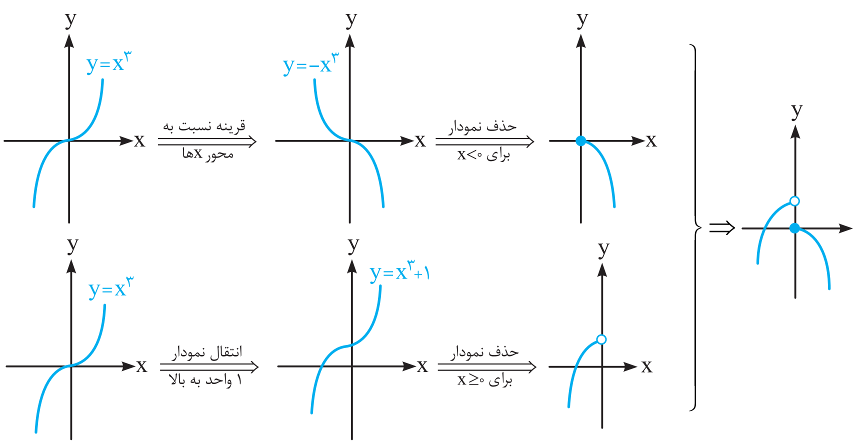
$$x_S=-\frac{b}{2a}=-\frac{-\frac{1}{3}}{2(1)}=\frac{1}{6}\ ,\ y_S=\left(\frac{1}{6}\right)^2-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{6}\right)+1=\frac{1}{36}-\frac{1}{18}+1=\frac{35}{36}$$

پس نمودار تابع به صورت مقابل است:



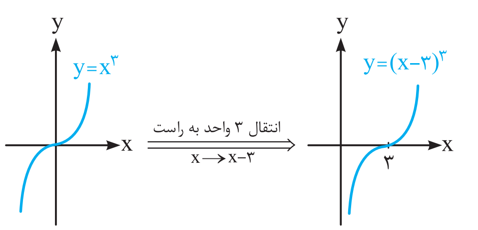
$\Rightarrow$ نمودار این تابع از ربع‌های سوم و چهارم عبور نمی‌کند.

۶ ۳

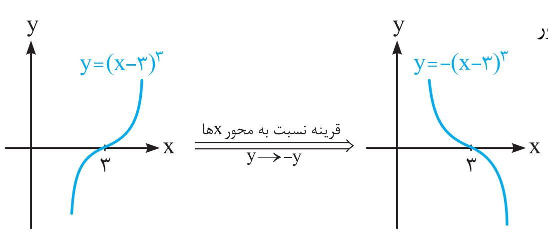


$\Rightarrow$ گزینهٔ (۳) صحیح است.

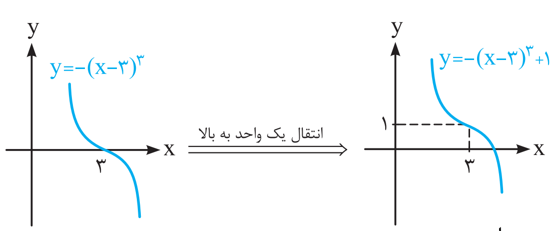
۷ ۳ با توجه به نمودار داده‌شده و گزینه‌ها، مشخص است که نمودار داده‌شده مربوط به یک تابع درجه ۳ می‌باشد. مشخص است که نمودار اولیهٔ $y=x^3$، ۳ واحد به راست انتقال یافته است. داریم:



هم‌چنین با توجه به نمودار داده‌شده مشخص است که تابع نسبت به محور xها قرینه شده است:

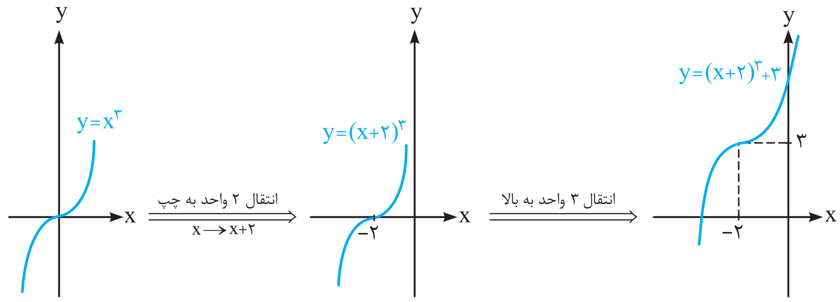


در نهایت نمودار یک واحد به بالا برده شده است:



می‌دانیم $(3-x)^3=-(x-3)^3$ پس ضابطهٔ داده شده در گزینهٔ (۳) صحیح است.

۸ | **۳** نمودار تابع داده‌شده از انتقال نمودار تابع $y=x^3$ به اندازهٔ دو واحد به چپ و سه واحد به بالا حاصل شده است:



با مقایسهٔ $y=(x-a)^3+b$ و $y=(x+2)^3+3$ نتیجه می‌گیریم: $b=3$ و $a=-2$ بنابراین $a+b=(-2)+3=1$.

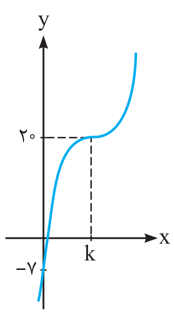
۹ | **۱** با توجه به نمودار، مشخص است که نمودار داده‌شده مربوط به تابع $y=-(x+1)^3+1$ می‌باشد. داریم:

$$y=-(x+1)^3+1=-(x^3+3x^2+3x+1)+1=-x^3-3x^2-3x-1+1=-x^3-3x^2-3x\Rightarrow y=-x(x^2+3x+3)$$

با مقایسهٔ y با $f(x)=(a-x)(x^2+bx+c)$ و برابر قرار دادن ضرایب متناظر داریم:

$$a=0\ ,\ b=3\ ,\ c=3\Rightarrow a+b+c=0+3+3=6$$

۱۰ | **۴** با توجه به نمودار داده شده مشخص است که $f(0)=-7$. پس:



$$f(0)=-7\Rightarrow -7=0^3-9(0)^2+a(0)+b\Rightarrow b=-7\Rightarrow f(x)=x^3-9x^2+ax-7$$

از طرفی با توجه به شکل داده‌شده مشخص است که نمودار به صورت $y=(x-k)^3+20$ می‌باشد. داریم:

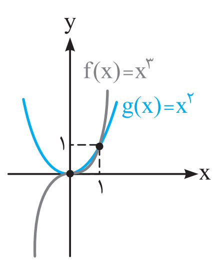
$$y=(x-k)^3+20\Rightarrow y=x^3-3kx^2+3k^2x-k^3+20$$

تمام ضرایب دو تابع $f(x)$ و y باید با هم برابر باشند پس:

ضریب ثابت: $-k^3+20=-7\Rightarrow -k^3=-27\Rightarrow k^3=27\Rightarrow k=3$

ضریب x: $3k^2=a\xRightarrow{k=3}a=3(3)^2=27\Rightarrow a+b=27+(-7)=20$

۱۱ | **۲** کافی است نمودار دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ را در یک دستگاه رسم کنیم:



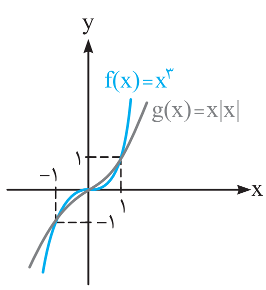
با توجه به نمودار مشخص است که نمودار $f(x)$ فقط به‌ازای $x>1$، بالاتر از نمودار $g(x)$ قرار دارد. $\Leftarrow$

۱۲ | **۲**

> **یادآوری** برای رسم توابع شامل قدرمطلق، بهتر است با توجه به ریشهٔ عبارت داخل قدرمطلق آن را به صورت یک تابع چندضابطه‌ای نوشته و سپس آن را رسم نماییم.

$$g(x)=x\underbrace{|x|}_{x=0\text{: ریشهٔ عبارت داخل قدرمطلق}}\Rightarrow g(x)=\begin{cases}x(x) & ;\ x\geq 0\\ x(-x) & ;\ x<0\end{cases}\Rightarrow g(x)=\begin{cases}x^2 & ;\ x\geq 0\\ -x^2 & ;\ x<0\end{cases}$$

می‌دانیم به‌ازای $0<x<1$، $x^2>x^3$، همچنین به‌ازای $-1<x<0$ داریم:



در فاصلهٔ $(-1,0)$ نمودار x^3 بالاتر از نمودار $-x^2$ قرار می‌گیرد $-1<x<0\xRightarrow{\times x^2}-x^2<x^3<0\Rightarrow$

پس با رسم نمودار دو تابع در یک دستگاه مشخص است که در بازه‌های $(0,1)$ و $(-\infty,-1)$ نمودار $f(x)$ پایین‌تر از $g(x)$ قرار دارد.