۷۳. گزینه ۱

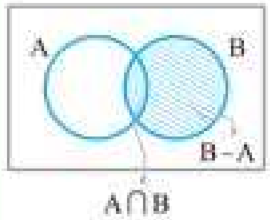
$$A_n=[-۲n,\frac{۸-n}{۳}]\Rightarrow\begin{cases}A_۴=[-۴,۲]\\A_۵=[-۱۰,۱]\\A_۱=[-۲,\frac{۷}{۳}]\end{cases}$$

با نمایش هر سه بازه روی محور اعداد، داریم:

$$(A_۴\cap A_۵)=[-۴,۱]\Rightarrow(A_۴\cap A_۵)-A_۱=[-۴,۱]-[-۲,\frac{۷}{۳}]=[-۴,-۲)$$

۷۴. گزینه ۱

با توجه به نمودار ون مقابل داریم:

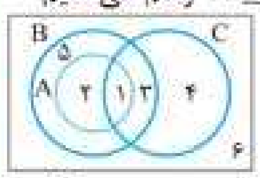


$(B\cap A)\cup(B-A)=B$

از طرفی چون $A\cap B\subseteq A$ است، پس $A\cup(A\cap B)=A$ (البته از نمودار ون بالا هم می‌توان این رابطه را به‌دست آورد.)

بنابراین: $[A\cup(A\cap B)]'\cap[(B\cap A)\cup(B-A)]=A'\cap B=A'-B'$

۷۵. گزینه ۱ - **روش اول** نمودار ون را با شرط $A\subseteq B$ رسم می‌کنیم:



$B-C=\{۲,۵\}$

$A\cap(B-C)=\{۲,۱\}\cap\{۲,۵\}=\{۲\}$

$A\cap B\cap C=\{۱\}$

$(A\cap(B-C))-(A\cap B\cap C)=\{۲\}-\{۱\}=\{۲\}$

حال گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم تا ببینیم کدام یک برابر با مجموعه‌ی {۲} می‌شود:

گزینه‌ی «۱»: $A\cap C'=\{۱,۲\}\cap\{۲,۵,۶\}=\{۲\}$ ✓

گزینه‌ی «۲»: $A\cap C=\{۱\}$ ✗

گزینه‌ی «۳»: $A=\{۱,۲\}$ ✗

گزینه‌ی «۴»: $B=\{۱,۲,۳,۵\}$ ✗

روش دوم: $A\subseteq B\Rightarrow A\cap B=A$

$$\underbrace{\underbrace{(A\cap(\underbrace{B-C}_{B\cap C'}))}_{A\cap B\cap C'}}_{A}-(\underbrace{A\cap B}_{A}\cap C)=(A\cap C')-(A\cap C)=A\cap C'$$

۷۶. گزینه ۳

$$\begin{cases}۹\le۱۰\xrightarrow{\text{ضابطه‌ی اولی}}t_۹=۹^۲-۹=۸۱-۹=۷۲\\۱۱>۱۰\xrightarrow{\text{ضابطه‌ی دومی}}t_{۱۱}=۲\times۱۱+۱=۲۳\end{cases}$$

$\Rightarrow t_۹+t_{۱۱}=۷۲+۲۳=۹۵$

۷۷. گزینه ۴ - **روش اول** جمله‌ی عمومی هر الگوی خطی به‌صورت $t_n=an+b$ است، بنابراین:

$$t_n=an+b\begin{cases}\xrightarrow[\text{جمله‌ی اول}]{n=۱}۵=a\times۱+b\\\xrightarrow[\text{جمله‌ی هشتم}]{n=۸}-۱۶=a\times۸+b\end{cases}$$

$$\xrightarrow[\text{دستگاه رو حل کن}]{\text{از هم کم کن و}}-۱۶-۵=۸a-a\Rightarrow-۲۱=۷a\Rightarrow a=-۳$$

$$\xrightarrow[\text{جایگزین کن}]{a+b=۵}-۳+b=۵\Rightarrow b=۸$$

$$\xrightarrow[\text{a و b رو جایگزین کن}]{t_n=an+b}t_n=-۳n+۸$$

$$\xrightarrow[\text{جمله‌ی دهم}]{n=۱۰}t_{۱۰}=-۳\times۱۰+۸=-۲۲$$

روش دوم: الگوی عددی خطی، همان دنباله‌ی حسابی است. از آنجایی که $t_۱=۵$ ، $t_۸=-۱۶$، از فرمول دو جمله و شماره داریم:

$$d=\frac{t_۸-t_۱}{۸-۱}=\frac{-۱۶-۵}{۷}=-۳$$

بنابراین:

$$t_n=t_۱+(n-۱)d\xrightarrow{n=۱۰}t_{۱۰}=t_۱+۹d=۵+۹(-۳)=-۲۲$$

۷۸. گزینه ۲

$$t_n=mn^۲-mn+۲n^۲-۲=(m+۲)n^۲-mn-۲$$

دنباله‌ی داده‌شده، خطی است؛ پس ضریب $n^۲$ باید صفر باشد، یعنی:

$m+۲=۰\Rightarrow m=-۲\Rightarrow t_n=۲n-۲$

$t_n=۴۶\Rightarrow۲n-۲=۴۶\Rightarrow n=۲۴$

بنابراین جمله‌ی بیست و چهارم برابر ۴۶ است.

۷۹. گزینه ۲ در شکل اول ۳ نقطه، در شکل دوم ۵ نقطه و در شکل سوم ۸ نقطه دیده می‌شود که الگوی زیر را می‌توان بیان کرد:

$t_۱=۳$

$t_۲=$ شماره‌ی جمله + جمله‌ی قبلی $=۳+۲=۵$

$t_۳=$ شماره‌ی جمله + جمله‌ی قبلی $=۵+۳=۸$

بنابراین، با همین الگو جملات را تا جمله‌ی هفتم می‌نویسیم:

۳ ، ۵ ، ۸ ، ۱۲ ، ۱۷ ، ۲۳ ، ۳۰ ، ...

+۲ +۳ +۴ +۵ +۶ +۷

۸۰. گزینه ۳ با توجه به شکل، مشاهده می‌شود که تعداد گلوله‌های توپر در هر شکل یک واحد از شماره‌ی شکل بیشتر است، ببین:

شماره‌ی شکل	۱	۲	۳	...	۱۷
تعداد گلوله‌های توپُر	۲	۳	۴	...	۱۸

۸۱. گزینه ۲ با کمی دقت می‌توان به الگوی زیر دست یافت:

شکل (۱): $t_۱=۲$

تعداد چوب‌کبریت‌های شکل قبل — شماره‌ی جمله

شکل (۲): $t_۲=۴=۲+۲$

شکل (۳): $t_۳=۷=۳+۴$

طبق این الگو، جملات دنباله (تعداد چوب‌کبریت‌ها) را تا جمله‌ی هفتم می‌نویسیم:

۲, ۴, ۷, ۱۱, ۱۶, ۲۲, ۲۹, ...

۸۲. گزینه ۳ دنباله‌ای رو که تعداد صندلی‌ها را در هر ردیف نمایش می‌دهد می‌نویسیم:

۲ ، ۵ ، ۸ ، ...

+۳ +۳

بنابراین اگر با همین الگو پیش برویم، داریم:

$$۲,۵,۸,۱۱,\underbrace{۱۴}_{t_۵},۱۷,۲۰,\underbrace{۲۳}_{t_۸},۲۶,...\Rightarrow t_۵+t_۸=۱۴+۲۳=۳۷$$

۸۳. گزینه ۱ با توجه به فرض‌های مسئله، داریم: $t_۵=-۲۵, t_۲=۲$

خب، فقط کافیه جای‌گذاری کنید:

$$t_n=an^۲+bn\Rightarrow\begin{cases}n=۲\Rightarrow t_۲=a(۲)^۲+b\times۲\\\xrightarrow{t_۲=۲}۲=۴a+۲b\\n=۵\Rightarrow t_۵=a(۵)^۲+b\times۵\\\xrightarrow{t_۵=-۲۵}-۲۵=۲۵a+۵b\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}۲=۴a+۲b\\-۲۵=۲۵a+۵b\end{cases}\xrightarrow{\times(-\frac{۵}{۲})}\begin{cases}-۵=-۱۰a-۵b\\-۲۵=۲۵a+۵b\end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{دو معادله رو جمع کن}}-۳۰=۱۵a\Rightarrow a=-۲\xrightarrow[a=-۲\text{ رو جایگزین کن}]{۴a+۲b=۲}$$

$$۴\times(-۲)+۲b=۲\Rightarrow-۸+۲b=۲\Rightarrow۲b=۲+۸$$

$$\Rightarrow۲b=۱۰\Rightarrow b=۵\xrightarrow[t_n=an^۲+bn]{\text{a و b رو جایگزین کن در } t_n}t_n=-۲n^۲+۵n$$

$$\xrightarrow{\text{به جای n، ۷ قرار بده}}t_۷=-۲\times۷^۲+۵\times۷\xrightarrow{\text{ساده کن}}$$

$$t_۷=-۲\times۴۹+۳۵=-۹۸+۳۵=-۶۳$$

۸۴. گزینه ۲ با کمی دقت می‌توان رابطه‌ی بین جملات را پیدا کرد. خب! چرا عصبانی میشی، صبرکن تا برات توضیح بدم. جمله‌ی اول که ۱ هستش،

در جملات بعدی، شماره‌ی جمله‌شون با جمله‌ی قبلی جمع می‌شه. ببین:

$$1 \xrightarrow{+2} 3 \xrightarrow{+3} 6 \xrightarrow{+4} 10 \xrightarrow{+5} 15 \xrightarrow{+6} 21 \xrightarrow{+7} \underbrace{28}_{t_7} \xrightarrow{+8} 36 \xrightarrow{+9} \underbrace{45}_{t_9}$$

$$\Rightarrow t_7 + t_9 = 28 + 45 = 73$$

۸۵. گزینه۳ • **روش اول** دقت کنید که جملات، یک در میان منفی و مثبت هستند، پس باید در جمله‌ی عمومی دنباله، عبارت $(-1)^n$ وجود داشته باشد، برای این‌که:

$$(-1)^n = \begin{cases} -1 & \text{n های فرد} \\ 1 & \text{n های زوج} \end{cases}$$

اگر از منفی صرف‌نظر کنیم، مشاهده می‌کنیم که صورت کسر، یک واحد یک واحد اضافه شده است، پس در صورت کسر باید $n(-1)^n$ داشته باشیم. اعداد مخرج هم، همگی به فرم n^2+1 هستند. ببین:

$$\text{مخرج کسر}: \begin{cases} 2 = 1^2+1 \\ 5 = 2^2+1 \\ 10 = 3^2+1 \\ \vdots \\ n^2+1 \end{cases} \xrightarrow{\text{حالا جمله‌ی عمومی رو بنویس}} t_n = \frac{(-1)^n n}{n^2+1}$$

به نظر شما اگر اولین جمله مثبت بود و جمله‌ی دوم منفی و به همین ترتیب جملات یک در میان مثبت و منفی می‌شد، جمله‌ی عمومی دنباله چی می‌شد؟

روش دوم جمله‌ی دوم دنباله، $\frac{2}{5}$ است؛ یعنی: $t_2 = \frac{2}{5}$

فقط در گزینه‌ی «۳» این شرط برقرار است.

۸۶. گزینه۳ کافی است t_n را برابر صفر قرار دهیم:

$$\frac{2^{n^2-9n-10}-1}{n+7} = 0 \xrightarrow[\text{صورتش صفر باشد}]{\text{کسری برابر صفر است که}} 2^{n^2-9n-10}-1=0$$

$$\Rightarrow 2^{n^2-9n-10} = 1 \xrightarrow{\text{پایه‌ها رو یکی کن}} 2^{n^2-9n-10} = 2^0$$

$$\Rightarrow n^2-9n-10=0 \xrightarrow{\text{تجزیه کن}} (n+1)(n-10)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n=-1 & \text{غ ق ق (چرا؟)} \\ n=10 \end{cases}$$

بنابراین جمله‌ی دهم دنباله برابر صفر است.

۸۷. گزینه۳ خب! کافیه هر دو جمله‌ی عمومی را با هم برابر بگذاریم:

$$a_n = b_n \Rightarrow \frac{n}{n^2+5} = \frac{1}{n+1} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} n^2+5 = n^2+n \Rightarrow n=5$$

یعنی جمله‌ی پنجم دو دنباله‌ی a_n و b_n برابر است.

۸۸. گزینه۲ جملات این دنباله تقریباً رفتاری شبیه دنباله‌ی فیبوناچی دارند با این تفاوت که جمله‌های اول و دوم آن هر دو ۱ نیست. در این دنباله جمله‌های اول و دوم به‌ترتیب ۱ و ۲ بوده و جملات بعدی مجموع دو جمله‌ی قبلی است، یعنی: $n \ge 3: t_n = t_{n-1} + t_{n-2}$

بنابراین جمله‌ی بعدی مجموع ۸ و ۱۳ یعنی ۲۱ است.

۸۹. گزینه۴ • **روش اول** هشت جمله‌ی نخست این دنباله را می‌نویسیم:

$$t_n = 2t_{n-1} - 2 \ , \ t_1 = 3$$

$$\xrightarrow{n=2} t_2 = 2t_1 - 2 = 2\times 3 - 2 = 4$$

$$\xrightarrow{n=3} t_3 = 2t_2 - 2 = 2\times 4 - 2 = 6$$

و اگر به همین‌ترتیب ادامه دهیم، جملات این دنباله به‌صورت زیر خواهند بود:

۳،۴،۶،۱۰،۱۸،۳۴،۶۶،۱۳۰، ...

$$\Rightarrow \begin{cases} t_8 = 130 \\ t_7 = 66 \end{cases} \Rightarrow t_8 - t_7 = 130 - 66 = 64$$

روش دوم اگر چند جمله‌ی اول این دنباله را بنویسیم، به یک الگوی هندسی برخورد می‌کنیم، ببین:

$$3 \xrightarrow{+1} 4 \xrightarrow{+2} 6 \xrightarrow{+4} 10 \xrightarrow{+8} 18$$

همان‌طور که مشاهده می‌کنید، اختلاف هر دو جمله‌ی متوالی، تشکیل یک دنباله‌ی هندسی با قدرنسبت ۲ داده است. اگر دنباله‌ی اختلاف جملات را با b_n نمایش دهیم، جملات b_n به‌صورت روبه‌رو خواهند بود: $b_n: 1,2,4,8,...$

می‌دانیم جمله‌ی عمومی دنباله‌ی هندسی که قدر نسبت آن ۲ و جمله‌ی آغازین ۱ دارد به‌صورت زیر قابل بیان است:

$$b_n = b_1 r^{n-1} \xrightarrow{b_1=1,\, r=2} b_n = (1)\times 2^{n-1} \Rightarrow b_n = 2^{n-1}$$

البته باید توجه کنید که در دنباله‌ی اختلاف جملات (b_n)، جمله‌ی اول $t_2 - t_1$، جمله‌ی دوم $t_3 - t_2$ و به همین‌ترتیب این الگو ادامه پیدا می‌کند. پس برای محاسبه‌ی $t_8 - t_7$ باید جمله‌ی هفتم دنباله‌ی b_n را بیابیم:

$$b_n = 2^{n-1} \xrightarrow{n=7} b_7 = t_8 - t_7 = 2^{7-1} = 2^6 = 64$$

تذکر: روش دوم موقعی اهمیت پیدا می‌کند که طراح سؤال می‌پرسیدند که به فرض $t_{20} - t_{19}$ کدام است؟

۹۰. گزینه۳ با توجه به رابطه‌ی داده‌شده داریم:

$$t_n - t^3_{n-1} = 0 \Rightarrow t_n = t^3_{n-1} \quad (*)$$

حال اگر رابطه‌ی (*) را به‌صورت یک عبارت جبری بخوانیم، داریم:

«در دنباله‌ی داده‌شده، هر جمله، مکعب جمله‌ی قبل از خود است.»

این‌جوری هم ببین:

$$\begin{cases} t_1 = 2 \\ t_n = t^3_{n-1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n=2: t_2 = t_1^3 = 2^3 \\ n=3: t_3 = t_2^3 = (2^3)^3 = 2^9 \\ n=4: t_4 = t_3^3 = (2^9)^3 = 2^{27} \\ n=5: t_5 = t_4^3 = (2^{27})^3 = 2^{81} \end{cases}$$

۹۱. گزینه۳

$$t_n > 0 \xrightarrow[\text{جایگزین کن}]{\text{جمله‌ی عمومی رو}} \frac{n-100}{3n+1} + \frac{1}{20} > 0 \xrightarrow{\text{مخرج مشترک}}$$

$$\frac{20n - 2000 + 3n + 1}{20(3n+1)} > 0 \xrightarrow{\text{ساده کن}} \frac{23n - 1999}{20(3n+1)} > 0$$

$$\xrightarrow[\text{چون n عددی طبیعی است}]{\text{مخرج کسر همواره مثبت است}} 23n - 1999 > 0 \Rightarrow 23n > 1999$$

$$\Rightarrow n > \frac{1999}{23} \Rightarrow n > 86/91 \xrightarrow{n\in\mathbb{N}} n \ge 87$$

بنابراین اولین جمله‌ی مثبت دنباله، جمله‌ی هشتاد و هفتم است.

۹۲. گزینه۲ جمله‌ی عمومی هر الگوی خطی به‌صورت $t_n = an + b$ است (همون معادله‌ی خط).

$$\begin{cases} t_4 = 8 \\ t_9 = -2 \end{cases} \xrightarrow{\text{در } t_n \text{ قرار بده}} \begin{cases} t_4 = 4a + b = 8 \\ t_9 = 9a + b = -2 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{دو رابطه را از هم کم کن}} 9a - 4a = -2 - 8 \Rightarrow 5a = -10$$

$$\Rightarrow a = -2 \xrightarrow[\text{جایگزین کن}]{\text{در } 4a+b=8} 4\times(-2) + b = 8 \Rightarrow -8 + b = 8$$

$$\Rightarrow b = 8 + 8 = 16 \xrightarrow{\text{a و b رو قرار بده در } t_n} t_n = -2n + 16$$

تست از ما خواسته که مشخص کنیم الگو چند جمله‌ی مثبت دارد، یعنی باید نامعادله‌ی $t_n > 0$ را حل کنیم:

$$-2n + 16 > 0 \Rightarrow -2n > -16 \xrightarrow{\div(-2)} n < 8$$

یعنی هفت جمله‌ی اول این الگو، مثبت هستند.

۹۳. گزینه۲ جمله‌ی عمومی الگوی خطی به‌صورت $t_n = an + b$ است، پس:

$$\begin{cases} t_{10} = a\times 10 + b = 10a + b & (1) \\ t_{18} = a\times 18 + b = 18a + b & (2) \end{cases}$$

$$\frac{3t_{10}+t_{18}}{4} \xrightarrow{\text{۱ و ۲}} \frac{3(10a+b)+(18a+b)}{4}$$

$$=\frac{30a+3b+18a+b}{4}=\frac{48a+4b}{4}$$

$$\xrightarrow{\text{ساده کن}} \frac{48a}{4}+\frac{4b}{4}=12a+b \xrightarrow{\text{مقایسه با } t_n=an+b} n=12$$

بنابراین عبارت داده‌شده با جمله‌ی دوازدهم الگو برابر است.

۹۴. گزینه ۴ دنباله‌ی شامل تمام مربع‌های موجود در هر شکل (مربع‌های رنگی و سفید) به‌صورت مقابل است: $4, 9, 16, \ldots$

در هر شکل به‌ترتیب به اندازه‌ی $\underbrace{0^2, 1^2, 2^2}_{\text{تعداد مربع‌های سفید}}$ و... از کل مربع‌ها سفید است؛

بنابراین تعداد مربع‌های رنگی در هر شکل برابر است با:

شماره‌ی شکل	تعداد کل مربع‌ها	تعداد مربع‌های سفید	تعداد مربع‌های رنگی
۱	2^2	0^2	2^2-0^2
۲	3^2	1^2	3^2-1^2
۳	4^2	2^2	4^2-2^2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	$(n+1)^2$	$(n-1)^2$	$t_n=(n+1)^2-(n-1)^2$

$$\xrightarrow[\text{اتحاد مزدوج}]{t_n \text{ رو تجزیه کن}} t_n=((n+1)+(n-1))((n+1)-(n-1))$$

$$\xrightarrow{\text{ساده کن}} t_n=(2n)(2) \Rightarrow t_n=4n$$

$$\xrightarrow{t_n \text{ را برابر ۱۴۴ قرار بده}} t_n=144 \Rightarrow 4n=144 \xrightarrow{\div 4} n=36$$

۹۵. گزینه ۳ • روش اول اگر به هر شکل ۴ نقطه اضافه کنیم، تعداد نقاط شکل‌ها، مربع کامل می‌شود، بنابراین برای پیدا کردن تعداد نقاط هر شکل، کافی است از اعداد مربع کامل ۴ واحد کم کنیم:

شماره‌ی شکل	۱	۲	۳	$\cdots$	n
تعداد نقاط	$3^2-4=5$	$4^2-4=12$	$5^2-4=21$	$\cdots$	$(n+2)^2-4$

بنابراین جمله‌ی عمومی این الگو را می‌توان به‌صورت $t_n=(n+2)^2-4$ در نظر گرفت:

$$\xrightarrow{t_n \text{ رو ساده کن}} t_n=n^2+4n+4-4 \Rightarrow t_n=n^2+4n$$

$$\xrightarrow{n \text{ رو ۱۰ بذار}} t_{10}=10^2+4\times10=100+40=140$$

روش دوم:

شماره‌ی جمله	۱	۲	۳	$\cdots$	n
تعداد نقاط	۵	۱۲	۲۱	$\cdots$	
الگو	2^2+1	3^2+3	4^2+5	$\cdots$	$t_n=(n+1)^2+(2n-1)$

$$\Rightarrow t_n=(n+1)^2+(2n-1)=n^2+2n+1+2n-1$$

$$t_n=n^2+4n \Rightarrow t_{10}=10^2+4(10)=100+40=140$$

۹۶. گزینه ۲ تعداد مربع‌های هر شکل را می‌نویسیم و سعی می‌کنیم الگو را رعایت کنیم:

شماره‌ی شکل	۱	۲	۳
تعداد مربع‌ها	۱	۱+۲	۱+۲+۳

شماره‌ی شکل	۴	$\cdots$	n
تعداد مربع‌ها	۱+۲+۳+۴	$\cdots$	$1+2+3+\cdots+n$

طبق الگوی داده‌شده، در شکل nاُم تعداد مربع‌ها برابر مجموع اعداد طبیعی از ۱ تا n خواهد بود.

> **نکته:** مجموع اعداد طبیعی از ۱ تا n برابر است با:
> $$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

بنابراین جمله‌ی عمومی الگوی داده‌شده به‌صورت زیر خواهد بود:

$$t_n=\frac{n(n+1)}{2} \xrightarrow{n \text{ رو ۸ بذار}} t_8=\frac{8\times(8+1)}{2}=4\times9=36$$

۹۷. گزینه ۳ در الگوی داده‌شده، مربع‌های میانی، نمایش‌دهنده‌ی اعداد مربع کامل‌اند. در شکل (۱)، چیزی به یک اضافه نشده، اما در شکل (۲)، یک مربع، در شکل (۳)، دو مربع و در شکل (۴)، سه مربع اضافه شده است. بنابراین در هر شکل تعداد مربع‌های اضافه‌شده از شماره‌ی شکل یک واحد کمتر است؛ پس جمله‌ی عمومی زیر را می‌توان برای این الگو در نظر گرفت:

$$t_n=n^2+(n-1) \xrightarrow[n=4]{\text{به‌عنوان مثال}} t_4=4^2+4-1=19 \ \text{(شکل (۴))} ✓$$

$$t_{12}=12^2+12-1=144+11=155$$

۹۸. گزینه ۱ فرض مسئله این است که $t_n>0$ باشد:

$$t_n>0 \xrightarrow{\text{جمله‌ی عمومی رو جایگزین کن}} 80n-5n^2>0$$

$$\xrightarrow{\text{تا معادله رو حل کن}} 80n-5n^2=0 \xrightarrow{\text{فاکتور بگیر}} 5n(16-n)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n=0 \\ n=16 \end{cases} \xrightarrow{\text{جدول تعیین علامت}}$$

n	$-\infty$		0		16		$+\infty$
t_n		−	0	+	0	−	

$$\xrightarrow[t_n>0]{\text{جواب رو بنویس}} 0<n<16$$

بین صفر و ۱۶، پانزده عدد طبیعی وجود دارد، یعنی دنباله‌ی داده‌شده، ۱۵ جمله‌ی مثبت دارد. همان‌طور که می‌دانید تعداد اعداد صحیح در بازه‌ی (m,n) برابر است با: $m-n-1$

۹۹. گزینه ۴ • روش اول همان‌طور که مشاهده می‌کنید، جملات زوج این دنباله صفرند و این مطلب فقط در گزینه‌ی «۴» دیده می‌شود:

$$t_n=\frac{1+(-1)^{n+1}}{4n} \Rightarrow \begin{cases} n=1: t_1=\frac{1+(-1)^2}{4\times1}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2} \\ n=2: t_2=\frac{1+(-1)^3}{4\times2}=\frac{1-1}{8}=\frac{0}{8}=0 \\ n=3: t_3=\frac{1+(-1)^4}{4\times3}=\frac{1+1}{12}=\frac{2}{12}=\frac{1}{6} \\ n=4: t_4=\frac{1+(-1)^5}{4\times4}=\frac{1+(-1)}{16}=\frac{0}{16}=0 \end{cases}$$

در گزینه‌ی «۱» جملات یک در میان، مثبت و منفی هستند. در گزینه‌های «۲» و «۳» هم، همه‌ی جملات در حال تغییرند.

روش دوم در دنباله‌ی داده‌شده $t_2=0$ است و تنها گزینه‌ای که در این شرط صدق می‌کند، گزینه‌ی «۴» است.

۱۰۰. گزینه ۱ جمله‌های اول و دوم این دنباله برابر ۱ و جمله‌ی سوم آن برابر ۲ است. برای $n\geq4$، هر جمله از ضرب دو جمله‌ی قبلی به‌دست آمده است، بنابراین می‌توان رابطه‌ی زیر را برای دنباله‌ی داده‌شده نوشت:

$$\begin{cases} t_1=t_2=1 \ , \ t_3=2 \\ n\geq4 \Rightarrow t_n=t_{n-1}\times t_{n-2} \end{cases}$$

پس اگر همین الگو را دنبال کنیم، جملات بعدی به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند:

$$1,1,2,2,4,8,\underbrace{32}_{8\times4},\underbrace{256}_{32\times8},\underbrace{256\times32}_{t_9=t_8\times t_7},\underbrace{256\times32\times256}_{t_{10}=t_9\times t_8}$$

$$\Rightarrow t_{10}=256\times32\times256=2^8\times2^5\times2^8=2^{21}$$

۱.۱. گزینه ۳ • **روش اول** الگوی زیر همه‌ی جزئیات را به‌طور کامل نمایش می‌دهد:

$$۲ \;,\; ۷ \;,\; ۱۵ \;,\; ۲۶ \;,\; ۴۰$$

$$+۵ \quad +۸ \quad +۱۱ \quad +۱۴$$

$$+۳ \quad +۳ \quad +۳$$

روش دوم با توجه به مطالب درسنامه، اعداد داده‌شده مجموع جملات دنباله‌های مربعی و مثلثی هستند:

$a_n = n^۲ \xrightarrow{\text{جملات رو بنویس}} ۱,۴,۹,۱۶,۲۵,\dots$: دنباله‌ی مربعی

$b_n = \dfrac{n(n+۱)}{۲} \xrightarrow{\text{جملات رو بنویس}} ۱,۳,۶,۱۰,۱۵,\dots$: دنباله‌ی مثلثی

$\Rightarrow c_n = a_n + b_n \xrightarrow{\text{جملات رو بنویس}} ۲,۷,۱۵,۲۶,۴۰,\dots$

۱.۲. گزینه ۱ ابتدا جمله‌ی عمومی دنباله‌ی t_n را گویا می‌کنیم:

$$t_n = \frac{۱}{\sqrt{n+۱}+\sqrt{n}} \times \frac{\sqrt{n+۱}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+۱}-\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n+۱}-\sqrt{n}}{n+۱-n} = \sqrt{n+۱}-\sqrt{n}$$

حال مجموع $t_۱ + t_۲ + \dots + t_{۹۹}$ را محاسبه می‌کنیم:

$$t_۱ = \sqrt{۲}-\sqrt{۱} \;,\; t_۲ = \sqrt{۳}-\sqrt{۲} \;,\; t_۳ = \sqrt{۴}-\sqrt{۳}$$

$$,\dots,\; t_{۹۸} = \sqrt{۹۹}-\sqrt{۹۸} \;,\; t_{۹۹} = \sqrt{۱۰۰}-\sqrt{۹۹}$$

کاملاً واضح است که با جمع‌کردن جملات این دنباله، رادیکال‌ها دوبه‌دو با هم ساده می‌شوند و فقط $-\sqrt{۱}$ و $\sqrt{۱۰۰}$ باقی می‌ماند، ببین:

$$t_۱ + t_۲ + \dots + t_{۹۹} = (\cancel{\sqrt{۲}} - ۱) + (\cancel{\sqrt{۳}} - \cancel{\sqrt{۲}}) + (\cancel{\sqrt{۴}} - \cancel{\sqrt{۳}})$$

$$+ \dots + (\cancel{\sqrt{۹۹}} - \cancel{\sqrt{۹۸}}) + (\sqrt{۱۰۰} - \cancel{\sqrt{۹۹}})$$

$$\Rightarrow t_۱ + t_۲ + \dots + t_{۹۹} = -۱ + \sqrt{۱۰۰} = -۱ + ۱۰ = ۹$$

۱.۳. گزینه ۳ باید جملات منفی هر دو ضابطه را بیابیم. در ضابطه‌ی اول داریم:

$$n < ۵ \Rightarrow t_n = n^۲ + n - ۲۰ < ۰ \xrightarrow{\text{تجزیه کن}} \underbrace{(n+۵)}_{\text{مثبت}}(n-۴) < ۰$$

$\Rightarrow n - ۴ < ۰ \Rightarrow n < ۴ \xrightarrow{n \in \mathbb{N}} n = ۱,۲,۳ \Rightarrow$ ۳ جمله‌ی منفی دارد.

کمان کسینوس $\alpha = \dfrac{۵\pi}{n}$ است و $n \geq ۵$ است. توجه کنید که:

$$n \geq ۵ \Rightarrow \frac{۱}{n} \leq \frac{۱}{۵} \Rightarrow ۰ < \frac{۵\pi}{n} \leq \pi$$

کسینوس در ربع اول ($۰ < \alpha < \frac{\pi}{۲}$)، مثبت و در ربع دوم ($\frac{\pi}{۲} < \alpha \leq \pi$)، منفی است؛ بنابراین مقادیر $\cos(\frac{۵\pi}{n})$ موقعی منفی می‌شوند که:

$$\frac{\pi}{۲} \leq \frac{۵\pi}{n} < \pi \xrightarrow{\times \frac{۲}{\pi}} ۱ < \frac{۱۰}{n} \leq ۲ \xrightarrow{\text{معکوس}} \frac{۱}{۲} \leq \frac{n}{۱۰} < ۱$$

$$\xrightarrow{\times ۱۰} \frac{۱۰}{۲} \leq n < ۱۰ \xrightarrow{n \geq ۵} ۵ \leq n < ۱۰$$

یعنی جملات پنجم، ششم، هفتم، هشتم و نهم همگی منفی هستند؛ بنابراین این دنباله در مجموع ۸ جمله‌ی منفی دارد.

۱.۴. گزینه ۴ الگوی مربوط به تعداد کل کاشی‌ها، کاشی‌های سفید و کاشی‌های تیره را می‌نویسیم:

شماره‌ی شکل (n)	۱	۲	۳	...	n
کل کاشی‌ها (a_n)	۲×۴	۲×۶	۲×۸	...	$a_n = ۲\times(۲n+۲) = ۴(n+۱)$
کاشی‌های سفید (b_n)	۲×۱	۲×۲	۲×۳	...	$b_n = ۲\times n = ۲n$
کاشی‌های تیره (t_n) $t_n = a_n - b_n$	$۲(۴-۱)$	$۲(۶-۲)$	$۲(۸-۳)$	...	$t_n = ۲(۲n+۲-n) = ۲(n+۲)$

بنابراین با توجه به جمله‌ی عمومی کاشی‌های سفید، مشخص می‌کنیم در شکل چندم ۱۰۰ کاشی سفید داریم:

$$b_n = ۲n \xrightarrow{b_n = ۱۰۰} ۱۰۰ = ۲n \Rightarrow n = ۵۰$$

حالا کافی است در الگوی کاشی‌های تیره، به جای n قرار دهیم ۵۰:

$$t_n = ۲(n+۲) \xrightarrow{n=۵۰} t_{۵۰} = ۲(۵۰+۲) = ۲\times۵۲ = ۱۰۴$$

۱.۵. گزینه ۳ فرض کنیم t_n، تعداد مربع‌های رنگی هر شکل باشد؛ در این صورت:

$$t_۲ - t_۱ = ۱۰ - ۴ = ۶ = ۲(۳)$$

$$t_۳ - t_۲ = ۱۸ - ۱۰ = ۸ = ۲(۴)$$

$$\vdots$$

$$t_{۴۰} - t_{۳۹} = ۲(۴۱) = ۸۲$$

۱.۶. گزینه ۴ دنباله‌ی تعداد مربع‌های رنگ‌شده را می‌نویسیم:

$۱,۳,۶,۱۰,\dots$

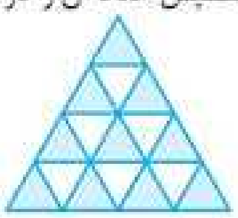
دنباله‌ی فوق، همان دنباله‌ی معروف مثلثی است که جمله‌ی عمومی آن از رابطه‌ی $t_n = \dfrac{n(n+۱)}{۲}$ به‌دست می‌آید:

$$t_n = \frac{n(n+۱)}{۲} \xrightarrow{\text{n رو ۸ قرار بده}} t_۸ = \frac{۸(۸+۱)}{۲} = ۴\times۹ = ۳۶$$

۱.۷. گزینه ۲ ابتدا الگوی مناسبی برای تعداد مثلث‌های سفید و رنگی پیدا می‌کنیم. برای این منظور جدول زیر را تشکیل می‌دهیم:

شکل	n	۱	۲	۳	۴
تعداد مثلث‌های رنگی	a_n	۱	۳	۶	۱۰
تعداد مثلث‌های سفید	b_n	۰	۱	۳	۶
مجموع کل مثلث‌ها	u_n	۱	۴	۹	۱۶

حالا خودمان شکل (۴) را با همین الگو رسم می‌کنیم؛ سپس اعداد آن را در جدول بالا وارد می‌کنیم:



شکل (۴)

$\Rightarrow \begin{cases} ۱۰ = \text{تعداد مثلث‌های رنگی} \\ ۶ = \text{تعداد مثلث‌های سفید} \end{cases}$

همان‌طور که تا حالا متوجه شدید، تعداد مثلث‌های رنگی، جملات دنباله‌ی مثلثی هستند، بنابراین:

$$a_n = \frac{n(n+۱)}{۲}$$

از طرفی مجموع کل مثلث‌ها در هر مرحله، جملات دنباله‌ی مربعی هستند، یعنی:

$$u_n = n^۲$$

در نتیجه جمله‌ی عمومی برای تعداد مثلث‌های سفید از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$b_n = u_n - a_n = n^۲ - \frac{n(n+۱)}{۲} = \frac{۲n^۲ - n^۲ - n}{۲}$$

$$= \frac{n^۲ - n}{۲} = \frac{n(n-۱)}{۲}$$

بنابراین نسبت تعداد مثلث‌های رنگی به تعداد مثلث‌های سفید برابر است با:

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\frac{n(n+۱)}{۲}}{\frac{n(n-۱)}{۲}} \xrightarrow{\text{ساده کن}} \frac{a_n}{b_n} = \frac{n+۱}{n-۱} = ۱/۱ \Rightarrow \frac{n+۱}{n-۱} = \frac{۱۱}{۱۰}$$

$$\Rightarrow ۱۰n + ۱۰ = ۱۱n - ۱۱ \Rightarrow n = ۲۱$$

۱.۸. گزینه ۱ هر دو دایره‌های توپر و توخالی از الگوی مثلثی تبعیت می‌کنند؛ بنابراین:

الگوی دایره‌های توخالی: $a_n = \dfrac{n(n+۱)}{۲} \Rightarrow a_{۱۲} = \dfrac{۱۲(۱۳)}{۲} = ۷۸$

الگوی دایره‌های توپر: $b_n = \dfrac{(n-۱)n}{۲} \Rightarrow b_{۱۲} = \dfrac{۱۱\times۱۲}{۲} = ۶۶$

$$\Rightarrow a_{۱۲} - b_{۱۲} = ۷۸ - ۶۶ = ۱۲$$

۱۰۹. گزینه ۳ جملات دنباله، یکی در میان زیاد و کم شده‌اند، باید الگوی آن را کشف کنیم:

$$1\ ,\ 3\ ,\ 2\ ,\ \frac{5}{2}\ ,\ \frac{9}{4}\ ,\ \frac{19}{8}\ ,\ \frac{37}{16}\ ,\ \frac{75}{32}$$

$$+2\quad -1\quad +\frac{1}{2}\quad -\frac{1}{4}\quad +\frac{1}{8}\quad -\frac{1}{16}\quad +\frac{1}{32}$$

$$\times(-\frac{1}{2})\quad \times(-\frac{1}{2})\quad \times(-\frac{1}{2})\quad \times(-\frac{1}{2})\quad \times(-\frac{1}{2})\quad \times(-\frac{1}{2})$$

۱۱۰. گزینه ۱ • **روش اول** با کمی دقت متوجه می‌شویم هر جمله در عدد $-\frac{1}{3}$ ضرب می‌شود از طرفی جمله‌ی اول دنباله نیز ۲۷- است، پس جمله‌ی عمومی این دنباله را می‌توان به‌صورت زیر در نظر گرفت:

$$t_n=(-27)(-\frac{1}{3})^{n-1}=(-3)^3(-3^{-1})^{n-1}$$

$$\xrightarrow[\text{عبارت رو ساده کن}]{\text{از قوانین توان}} t_n=(-1)(3)^3(-1)^{n-1}(3^{-1})^{n-1}$$

$$\xrightarrow[\text{توان‌ها جمع می‌شوند}]{\text{در پایه‌های مشترک،}} t_n=(-1)^n\times 3^3\times 3^{-n+1}$$

$$\Rightarrow t_n=(-1)^n\times 3^{4-n}\xrightarrow{(-1)^6=1} t_n=(-1)^{n+6}\times 3^{4-n}$$

• **روش دوم** در دنباله‌ی داده‌شده $t_1=-27$ است. فقط در گزینه‌ی «۱» این شرط برقرار است.

۱۱۱. گزینه ۱ جمله‌ی عمومی هر الگوی خطی به‌صورت $t_n=an+b$ است. با توجه به فرض‌های تست داریم:

$$\frac{t_{12}}{t_4}=\frac{7}{5}\Rightarrow\frac{12a+b}{4a+b}=\frac{7}{5}\Rightarrow 60a+5b=28a+7b$$

$$\Rightarrow 32a=2b\Rightarrow b=16a \quad (*)$$

$$t_{13}=\frac{1}{2}t_2+15\Rightarrow 13a+b=\frac{1}{2}(2a+b)+15$$

$$\Rightarrow 12a+\frac{b}{2}=15\xrightarrow{(*)}12a+\frac{16a}{2}=15$$

$$\Rightarrow 20a=15\Rightarrow a=\frac{15}{20}=\frac{3}{4}\xrightarrow{\text{در }(*)}b=16\times\frac{3}{4}=12$$

$$\Rightarrow t_n=\frac{3}{4}n+12\Rightarrow t_{20}=\frac{3}{4}\times 20+12=15+12=27$$

۱۱۲. گزینه ۲ جمله‌ی عمومی هر دنباله‌ی درجه‌ی دوم به‌صورت $t_n=an^2+bn+c$ است. با توجه به دنباله‌ی داده‌شده، داریم:

$$\begin{cases}t_1=-3\xrightarrow{n=1}a+b+c=-3 & (1)\\ t_2=0\xrightarrow{n=2}4a+2b+c=0 & (2)\\ t_3=5\xrightarrow{n=3}9a+3b+c=5 & (3)\end{cases}$$

$$(2)-(1):\ 3a+b=3$$

$$(2)-(3):\ -5a-b=-5$$

$$\xrightarrow{\text{دو معادله رو جمع کن}}-2a=-2$$

$$\Rightarrow a=1\xrightarrow[a=1]{3a+b=3}3+b=3\Rightarrow b=0$$

$$\xrightarrow{a+b+c=-3}1+0+c=-3\Rightarrow c=-4$$

$$\Rightarrow t_n=an^2+bn+c\xrightarrow[c=-4]{a=1,\ b=0}t_n=n^2-4$$

$$\xrightarrow{n=10}t_{10}=10^2-4\Rightarrow t_{10}=96$$

۱۱۳. گزینه ۴ جملات دنباله را می‌نویسیم، تا الگوی مناسبی پیدا کنیم:

$t_1=1$

$$n\geq 2,\ t_n=2t_{n-1}+1\Rightarrow\begin{cases}t_2=2t_1+1=2\times 1+1=3\\ t_3=2t_2+1=2\times 3+1=7\\ t_4=2t_3+1=2\times 7+1=15\end{cases}$$

و به همین ترتیب:

$$t_5=2\times 15+1=31\ ,\ t_6=2\times 31+1=63$$

$$t_7=2\times 63+1=127\ ,\ t_8=2\times 127+1=255$$

۱۱۴. گزینه ۴ جمله‌ی عمومی هر دنباله‌ی حسابی به‌صورت $t_n=t_1+(n-1)d$ است. مطالب گفته‌شده در سؤال به زبان ریاضی به‌صورت زیر قابل بیان است:

$$\begin{cases}t_3=20\xrightarrow{\text{در } t_n \text{ به جای n عدد ۳ رو قرار بده}}t_1+(3-1)d=20\\ t_7=56\xrightarrow{\text{در } t_n \text{ به جای n عدد ۷ رو قرار بده}}t_1+(7-1)d=56\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}t_1+2d=20\\ t_1+6d=56\end{cases}\xrightarrow{\text{دو معادله رو از هم کم کن}}6d-2d=56-20$$

$$\Rightarrow 4d=36\Rightarrow d=\frac{36}{4}\Rightarrow d=9\xrightarrow{t_1+2d=20}t_1+2\times 9=20$$

$$\Rightarrow t_1+18=20\Rightarrow t_1=2\xrightarrow[t_1=2,\ d=9]{t_n=t_1+(n-1)d}t_n=2+(n-1)\times 9$$

$$\xrightarrow{n=20}t_{20}=2+(20-1)\times 9\Rightarrow t_{20}=2+19\times 9=2+171=173$$

۱۱۵. گزینه ۱ شرط آن‌که سه جمله‌ی متوالی، تشکیل دنباله‌ی حسابی بدهند، آن است که جمله‌ی وسط، واسطه‌ی حسابی بین جملات اول و سوم باشد.

$3x+7,\ 2x-1,\ 5x+1$

$$\xrightarrow[a,b,c\ \Rightarrow\ b=\frac{a+c}{2}]{\text{میانگین اولی و سومی = وسطی}}2x-1=\frac{3x+7+5x+1}{2}$$

$$\xrightarrow[\times 2]{\text{ساده کن}}4x-2=8x+8\Rightarrow -2-8=8x-4x$$

$$\Rightarrow -10=4x\Rightarrow x=\frac{-10}{4}=-\frac{5}{2}$$

قدرنسبت هم، تفاضل دو جمله‌ی متوالی است، بنابراین:

$$d=(2x-1)-(3x+7)=-x-8\xrightarrow{x=-\frac{5}{2}}d=-(-\frac{5}{2})-8=\frac{-11}{2}$$

توجه کنید که اگر $-\frac{11}{2}$ در گزینه‌ها نبود، آن‌وقت باید می‌نوشتید:

$d=(3x+7)-(2x-1)$

یا مقداری را که به‌دست آوردید، قرینه کنید.

۱۱۶. گزینه ۳ کافیه صورت سؤال رو به زبان ریاضی بنویسیم:

$$\begin{cases}t_1+t_2+t_3=3\\ t_4+t_5+t_6=39\end{cases}$$

$$\xrightarrow[\text{جای‌گذاری کن}]{t_n=t_1+(n-1)d}\begin{cases}t_1+(t_1+d)+(t_1+2d)=3\\ (t_1+3d)+(t_1+4d)+(t_1+5d)=39\end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{ساده کن}}\begin{cases}3t_1+3d=3\\ 3t_1+12d=39\end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{دو معادله رو از هم کم کن}}12d-3d=39-3\Rightarrow 9d=36\Rightarrow d=4$$

$$\xrightarrow[d=4]{3t_1+3d=3}3t_1+3\times 4=3\Rightarrow 3t_1+12=3\Rightarrow 3t_1=3-12$$

$$\Rightarrow 3t_1=-9\Rightarrow t_1=-3$$

$$t_n=t_1+(n-1)d\xrightarrow{t_1=-3,\ d=4}$$

$$t_{10}=-3+(10-1)\times 4=-3+9\times 4\Rightarrow t_{10}=33$$

۱۱۷. گزینه ۱ دقت کنید که در مجموع دو جمله‌ی t_8 و t_1، جمع دو اندیس ۱ و ۸ می‌شود ۹؛ بنابراین از قانون اندیس‌ها در حالت کلی استفاده می‌کنیم:

$$t_2+t_3+t_4+t_5+t_6+t_7\xrightarrow{\text{مرتبش کن}}(t_2+t_7)+(t_3+t_6)$$

$$+(t_4+t_5)\xrightarrow[\text{قانون اندیس‌ها } 1+8=9]{2+7=3+6=4+5=9}(t_1+t_8)+(t_1+t_8)+(t_1+t_8)$$

$$=3(t_1+t_8)\xrightarrow[\text{طبق فرض}]{t_1+t_8=k}3k$$

۱۱۸. گزینه ۴ جمله‌ی هشتم دنباله $t_8 = t_1 + 7d$ است. طبق فرض سؤال داریم:

$$t_6 + 2t_9 = 90 \xrightarrow{t_n = t_1+(n-1)d} \begin{cases} t_6 = t_1+5d \\ t_9 = t_1+8d \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{در رابطه قرار بده}} (t_1+5d)+2(t_1+8d)=90$$

$$\xrightarrow{\text{ساده‌کن}} 3t_1+21d=90 \xrightarrow{\div 3} \underbrace{t_1+7d}_{t_8}=30 \Rightarrow t_8=30$$

۱۱۹. گزینه ۲ طبق مطالب گفته‌شده در درسنامه، داریم:

$$d = 9-5=4$$

$$\text{تعداد عددها} = \frac{\text{اولی}-\text{آخری}}{d}+1 \Rightarrow n = \frac{405-5}{4}+1 = 101$$

۱۲۰. گزینه ۱ • روش اول

$$-10,\underbrace{○,○,○,○,○}_{\text{پنج واسطه‌ی حسابی}},80 \Rightarrow \begin{cases} t_1=-10 \\ t_7=80 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{t_n=t_1+(n-1)d} t_7 = t_1+(7-1)d \Rightarrow 80=-10+6d$$

$$\Rightarrow 90=6d \Rightarrow d=\frac{90}{6}=15$$

$$\xrightarrow{\text{جملات رو بنویس}} -10,\underbrace{5,20,35,50,65}_{\text{۵ واسطه‌ی حسابی}},80$$

$$\text{مجموع پنج واسطه} = 5+20+35+50+65 = 175$$

: روش دوم طبق فرمول گفته‌شده در درسنامه داریم:

$$-10,\underbrace{○,○,○,○,○}_{\text{پنج واسطه‌ی حسابی}},80$$

$$\xrightarrow[m=5]{a=-10,\,b=80} d=\frac{b-a}{m+1}=\frac{80-(-10)}{5+1}$$

$\Rightarrow d = \frac{90}{6}=15 \Rightarrow$ ادامه مثل روش اول

۱۲۱. گزینه ۲ • روش اول در دنباله‌ی داده‌شده، جملات ۶ واحد، ۶ واحد در حال افزایش‌اند، پس قدرنسبت دنباله برابر ۶ و جمله‌ی اول هم که ۱۵- است؛ بنابراین:

$$\xrightarrow{\text{جمله‌ی عمومی دنباله‌ی حسابی}} t_n=t_1+(n-1)d$$

$$\xrightarrow[d=6]{t_1=-15} t_n=-15+(n-1)(6)$$

$$\xrightarrow{\text{ساده‌کن}} t_n=-15+6n-6 \Rightarrow t_n=6n-21$$

: روش دوم جمله‌ی دوم دنباله ۹- است و فقط در گزینه‌ی «۲»، $t_2=-9$ می‌شود.

۱۲۲. گزینه ۲ جمله‌ی عمومی هر دنباله‌ی حسابی، خطی است. فقط گزینه‌ی «۲» فرم خطی یا درجه‌ی اول دارد.

۱۲۳. گزینه ۴ در سؤال گفته شده که هزینه‌ی مکالمه‌ی هر ۲ دقیقه، ۴۰ تومان است؛ پس می‌توان فرض کرد که هزینه‌ی مکالمه‌ی هر ۱ دقیقه، ۲۰ تومان است. بنابراین می‌توانیم الگوی زیر را در نظر بگیریم:

مدت زمان برحسب دقیقه	۱	۲	۳	۴	...	n
قیمت مکالمه	۲۰	۴۰	۶۰	۸۰	...	۲۰n

پس دنباله‌ی بالا یک دنباله‌ی حسابی با قدرنسبت ۲۰ و جمله‌ی اول ۲۰ است، بنابراین جمله‌ی عمومی این دنباله به‌صورت زیر خواهد بود:

$$t_n=t_1+(n-1)d \Rightarrow t_n=20+(n-1)\times 20 \xrightarrow{\text{ساده‌کن}} t_n=20n$$

در تست گفته شده که هزینه‌ی ثابت یک سیم‌کارت برابر ۳۰۰۰ تومان است. با احتساب هزینه‌ی ثابت، جمله‌ی عمومی هزینه‌ی کل مکالمه در یک ماه چنین است:

$$a_n=20n+3000$$

می‌دانیم که ۵ ساعت معادل ۳۰۰ دقیقه است؛ بنابراین:

$a_{300}=20\times300+3000=6000+3000=9000$ تومان

۱۲۴. گزینه ۳

$$19,\underbrace{○,○,○,○}_{\text{درج چهار واسطه‌ی حسابی}},89 \xrightarrow[m=4]{a=19,\,b=89} d=\frac{b-a}{m+1}=\frac{89-19}{4+1}$$

$$\Rightarrow d=\frac{70}{5}=14 \xrightarrow{\text{حالا جملات رو بنویس}} 19,\underbrace{33,47,61,75}_{\text{چهار واسطه}},89$$

یا این‌که: $89-d=89-14=75$

بنابراین بزرگ‌ترین عدد ۷۵ است.

۱۲۵. گزینه ۴ می‌دانیم که جمله‌ی عمومی هر دنباله‌ی حسابی به‌صورت $t_n=t_1+(n-1)d$ است، یعنی یک رابطه‌ی خطی برحسب n. همان‌طور که دیده می‌شود، در دنباله‌ی حسابی n^2 وجود ندارد، بنابراین در دنباله‌ی داده‌شده باید عبارت شامل n^2 را از بین ببریم، در نتیجه ضریب n^2 باید برابر صفر باشد، یعنی:

$$m+6=0 \Rightarrow m=-6 \xrightarrow{\text{در } t_n \text{ قرار بده}} t_n = 0+\frac{-6n}{3}+4$$

$$\Rightarrow t_n=-2n+4 \xrightarrow[\text{قرار بده}]{n \text{ رو } 10} t_{10}=-2\times10+4=-20+4=-16$$

۱۲۶. گزینه ۳

$$\xrightarrow{\text{سؤال رو به زبان ریاضی بنویس}} \begin{cases} t_2=40 \\ t_5=25 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{t_n=t_1+(n-1)d} \begin{cases} t_2=t_1+d=40 \\ t_5=t_1+4d=25 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{دو معادله رو از هم کم کن}} 4d-d=25-40 \Rightarrow 3d=-15$$

$$\Rightarrow d=-5 \xrightarrow{t_1+d=40} t_1+(-5)=40 \Rightarrow t_1=45$$

$$\xrightarrow{\text{جمله‌ی عمومی رو بنویس}} t_n=45+(n-1)\times(-5)$$

$$\xrightarrow{\text{ساده‌کن}} t_n=-5n+50 \xrightarrow{\text{خواسته‌ی سؤال: } t_n>0} -5n+50>0$$

$$\Rightarrow -5n>-50 \xrightarrow[\text{جهت رو عوض کن}]{\div(-5)} n<10$$

بنابراین این دنباله ۹ جمله‌ی مثبت دارد.

۱۲۷. گزینه ۲ $a,\ b+2,\ c+4$

$$\xrightarrow[\text{وسطی، میانگین اولی و سومی است.}]{\text{سه جمله‌ی متوالی دنباله‌ی حسابی}} b+2=\frac{a+c+4}{2}$$

$$\xrightarrow{\times 2} 2b+\cancel{4}=a+c+\cancel{4} \Rightarrow a+c=2b \quad *$$

$$\xrightarrow[\text{مجموع سه عدد، ۱۸۰ است.}]{\text{فرض دوم}} a+(b+2)+(c+4)=180$$

$$\Rightarrow a+b+c+6=180 \Rightarrow (a+c)+b=174$$

$$\xrightarrow{*} 2b+b=174 \Rightarrow 3b=174 \Rightarrow b=\frac{174}{3}=58$$

۱۲۸. گزینه ۳ • روش اول کافی است با استفاده از جمله‌ی عمومی دنباله‌ی حسابی، رابطه‌ی داده‌شده را ساده کنیم:

$$t_1+(t_1+3d)+(t_1+6d)+(t_1+11d)=160$$

$$\xrightarrow{\text{ساده‌کن}} 4t_1+20d=160 \xrightarrow{\div 4} \underbrace{t_1+5d}_{t_6}=40 \Rightarrow t_6=40$$

: روش دوم طبق قانون اندیس‌ها داریم:

$$1+4+7+12=24=4\times6 \xrightarrow{\text{۴ تا جمله داریم}} t_1+t_4+t_7+t_{12}=4t_6$$

$$\Rightarrow 160=4t_6 \Rightarrow t_6=40$$

۱۲۹. گزینه ۲ بیایید در ابتدا، دنباله‌ی اعداد سه‌رقمی مضرب ۱۱ رو بنویسیم. اولین عدد سه‌رقمی مضرب ۱۱ برابر ۱۱۰، بعدیش ۱۲۱، ... و آخرین عدد سه‌رقمی مضرب ۱۱، برابر ۹۹۰ است، یعنی یک دنباله‌ی حسابی:

$$110,121,132,\ldots,990$$

در این دنباله‌ی حسابی $t_n = 990$ ، $t_1 = 110$ و $d = 11$ است. بنابراین طبق نکته‌ی گفته‌شده در درسنامه، تعداد اعداد مضرب ۱۱ بین ۱۱۰ و ۹۹۰ برابر است با:

$$n = \frac{t_n - t_1}{d} + 1 \Rightarrow n = \frac{990-110}{11} + 1 = 80 + 1 = 81$$

۱۳۰. گزینه ۲ فرض‌های مسئله را می‌نویسیم:

$$\begin{cases} t_1 = 2 \\ t_1 + t_2 + \cdots + t_6 = \frac{1}{5}(t_7 + t_8 + \cdots + t_{12}) \quad \boxed{1} \end{cases}$$

برای پیداکردن قدرنسبت، رابطه‌ی $\boxed{1}$ را به کمک جمله‌ی عمومی دنباله‌ی حسابی ساده می‌کنیم:

$$t_n = t_1 + (n-1)d \Rightarrow \begin{cases} t_2 = t_1 + d \\ t_3 = t_1 + 2d \\ t_4 = t_1 + 3d \\ t_5 = t_1 + 4d \\ t_6 = t_1 + 5d \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{همه‌رو جمع‌کن}} t_2 + \cdots + t_6 = 5t_1 + 15d \quad \boxed{2}$$

$$\begin{cases} t_7 = t_1 + 6d \\ t_8 = t_1 + 7d \\ t_9 = t_1 + 8d \\ t_{10} = t_1 + 9d \\ t_{11} = t_1 + 10d \\ t_{12} = t_1 + 11d \end{cases} \xrightarrow{\text{همه‌رو جمع‌کن}} t_7 + \cdots + t_{12} = 6t_1 + 51d \quad \boxed{3}$$

$\boxed{2}$ و $\boxed{3}$ را در رابطه‌ی $\boxed{1}$ قرار دهید:

$$t_1 + 5t_1 + 15d = \frac{1}{5}(6t_1 + 51d) \xrightarrow{\times 5} 5(6t_1 + 15d) = 6t_1 + 51d$$

$$\xrightarrow{\text{ساده‌کن}} 30t_1 + 75d = 6t_1 + 51d \Rightarrow 24t_1 + 24d = 0$$

$$\xrightarrow{t_1 = 2} 24 \times 2 + 24d = 0 \Rightarrow 24d = -2 \times 24 \Rightarrow d = -2$$

۱۳۱. گزینه ۴ دنباله‌ی داده‌شده حسابی است، بنابراین:

$$2 + x = \frac{(1-x) + (1+2x)}{2} \Rightarrow 4 + 2x = x + 2 \Rightarrow x = -2$$

$\Rightarrow$ جملات دنباله: $3, 0, -3, \ldots \Rightarrow$ قدرنسبت $= -3$

پس برای این‌که قدرنسبت ۴۸ باشد، باید جملات دنباله در ۱۶- ضرب شوند.

۱۳۲. گزینه ۳ دنباله‌ی حسابی اولیه:

$$\begin{cases} t_1 = a \\ d_1 = d \\ t_n = t_1 + (n-1)d_1 \end{cases} \xrightarrow{n=8} t_8 = a + (8-1)d \Rightarrow t_8 = a + 7d$$

دنباله‌ی حسابی جدید:

$$\begin{cases} t'_1 = a + 4 \\ d_2 = d + 5 \end{cases} \Rightarrow t'_8 = t'_1 + (8-1)d_2$$

$$\xrightarrow{\text{جای‌گذاری}} t'_8 = (a+4) + 7(d+5) \Rightarrow t'_8 = a + 4 + 7d + 35$$

$$\Rightarrow t'_8 = \underbrace{a + 7d}_{t_8} + 39$$

در نتیجه به جمله‌ی هشتم در دنباله‌ی اولیه، ۳۹ واحد اضافه شده است.

۱۳۳. گزینه ۲

$$1 \underbrace{\cdots\cdots}_{m\ \text{تا}} 64 \xrightarrow{\text{تعداد کل جملات}} n = m + 2$$

بنابراین در این دنباله‌ی حسابی داریم:

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ n = m + 2 \\ t_n = 64 \end{cases} \xrightarrow[t_n = t_1 + (n-1)d]{\text{جمله‌ی عمومی دنباله رو بنویس}} 64 = 1 + (m + 2 - 1) \times 3/5$$

$$\xrightarrow{-1} 63 = (m+1) \times \frac{7}{2} \xrightarrow{\times \frac{2}{7}} 18 = m + 1 \Rightarrow m = 17$$

۱۳۴. گزینه ۳ برای حل مسئله باید t_n را پیدا کنیم و نامعادله‌ی $t_n < 120$ را حل کنیم:

$$\begin{cases} t_1 = 4 \\ d = 10 - 4 = 6 \end{cases} \xrightarrow{t_n = t_1 + (n-1)d} t_n = 4 + (n-1) \times 6$$

$$\xrightarrow{\text{ساده‌کن}} t_n = 6n - 2 \xrightarrow{t_n < 120} 6n - 2 < 120 \Rightarrow 6n < 122$$

$$\Rightarrow n < \frac{122}{6} \Rightarrow n < 20/33 \xrightarrow{n \in \mathbb{N}} n \leq 20$$

تعداد اعداد طبیعی کوچک‌تر از ۲۰/۳۳، ۲۰ تاست، پس این دنباله ۲۰ جمله‌ی کوچک‌تر از ۱۲۰ دارد.

۱۳۵. گزینه ۱ سه جمله‌ی اول این دنباله را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$a - d, a, a + d \xrightarrow{\text{هر سه را جمع کن}} 3a = 39 \Rightarrow a = 13 \quad \boxed{*}$$

از طرفی طبق فرض مسئله داریم:

$$(a-d)^2 + a^2 + (a+d)^2 = 579$$

$$\xrightarrow{\text{ساده‌کن}} a^2 - 2ad + d^2 + a^2 + a^2 + 2ad + d^2 = 579$$

$$\Rightarrow 3a^2 + 2d^2 = 579 \xrightarrow{\boxed{*}} 3 \times (13)^2 + 2d^2 = 579$$

$$\xrightarrow{\text{ساده‌کن}} 507 + 2d^2 = 579 \Rightarrow 2d^2 = 72 \Rightarrow d^2 = 36 \Rightarrow d = \pm 6$$

چون طبق فرض $d > 0$ است، $d = 6$ را انتخاب می‌کنیم؛ بنابراین جملات دنباله به‌صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$\begin{cases} d = 6 \\ t_1 = a - d = 13 - 6 = 7 \end{cases} \xrightarrow{\text{سه جمله‌ی اول رو بنویس}} 7, 13, 19$$

$$\xrightarrow{\text{هر سه رو در هم ضرب کن}} \text{جواب} = 7 \times 13 \times 19 = 1729$$

۱۳۶. گزینه ۳

$$\begin{cases} O_{15} = a_1 + a_2 + \cdots + a_{15} \\ O_{16} = a_1 + a_2 + \cdots + a_{15} + a_{16} \end{cases}$$

$$\Rightarrow O_{16} - O_{15} = a_{16} \xrightarrow[a_1 = 1, d = 3]{a_n = a_1 + (n-1)d} O_{16} - O_{15} = 1 + (16 - 1) \times 3 = 46$$

۱۳۷. گزینه ۴ اگر جمله‌ی وسط را a فرض کنیم و قدرنسبت دنباله را هم d در نظر بگیریم، این پنج جمله‌ی متوالی، به‌صورت زیر قابل نمایش است:

$$a - 2d, a - d, a, a + d, a + 2d \xrightarrow[\text{همه رو جمع کن}]{\text{مجموع پنج جمله} = 180}$$

$$(a - \cancel{2d}) + (a - \cancel{d}) + a + (a + \cancel{d}) + (a + \cancel{2d}) = 180$$

$$\Rightarrow 5a = 180 \Rightarrow a = \frac{180}{5} = 36$$

۱۳۸. گزینه ۲ شرط واسطه‌ی حسابی را برای سه جمله‌ی اول می‌نویسیم:

$2x, 3x + y, 6x - 1$

$$\xrightarrow{\text{وسطی، میانگین اولی و سومی}} 3x + y = \frac{2x + 6x - 1}{2}$$

$$\xrightarrow{\times 2} \cancel{6x} + 2y = 2x + \cancel{6x} - 1 \Rightarrow 2x - 2y = 1$$

$$\xrightarrow{\div 2} x - y = \frac{1}{2} \Rightarrow |x - y| = \frac{1}{2}$$

۱۳۹. گزینه ۳ با توجه به مفروضات مسئله، اگر جمله‌ی سوم را a فرض کنیم، قدرنسبت برابر $a + 1$ خواهد بود (دو عدد متوالی)؛ بنابراین:

$$\begin{cases} t_3 = a \quad \boxed{1} \\ d = a + 1 \quad \boxed{2} \end{cases}$$

از طرفی می‌دانیم که قدرنسبت در هر دنباله‌ی حسابی، تفاضل دو جمله‌ی متوالی دنباله است، یعنی:

$$d = t_3 - t_2 \xrightarrow{\boxed{1}, \boxed{2}} \cancel{a} + 1 = \cancel{a} - t_2 \Rightarrow t_2 = -1$$

دقت کنید که اگر $d = a$ و $t_3 = a + 1$، آن‌گاه:

$$d = t_3 - t_2 \Rightarrow a = a + 1 - t_2 \Rightarrow t_2 = 1$$

در گزینه‌ها $t_2 = -1$ آمده است.

۱۴۰. گزینه ۲ ابتدا عبارت داده‌شده را ساده می‌کنیم:

$$t_{19}^2 - t_{13}^2 = 128d$$

$$\xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}} (t_{19} - t_{13})(t_{19} + t_{13}) = 128d \quad \boxed{1}$$

از قانون اندیس‌ها داریم:

$$13 + 19 = 15 + 17 = 32 \Rightarrow t_{13} + t_{19} = t_{15} + t_{17} \quad \boxed{2}$$

از طرفی داریم:

$$\begin{cases} t_{19} = t_1 + 18d \\ t_{13} = t_1 + 12d \end{cases} \xrightarrow{\text{دو رابطه رو کم کن}} t_{19} - t_{13} = 6d \quad \boxed{3}$$

با جای‌گذاری رابطه‌های ۲ و ۳ در رابطه‌ی ۱ داریم:

$$(6d)(t_{15} + t_{17}) = 128d \xrightarrow{\div 6d} t_{15} + t_{17} = \frac{128}{6} = \frac{64}{3}$$

۱۴۱. گزینه ۳ در دنباله‌ی حسابی داده‌شده داریم:

$$\begin{cases} t_1 = 3 \\ d = 7 - 3 = 4 \\ t_n = t_1 + (n-1)d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_{13} = 3 + 12 \times 4 = 51 \\ t_9 = 3 + 8 \times 4 = 35 \\ t_5 = 3 + 4 \times 4 = 19 \end{cases}$$

از آنجایی که حاصل همه‌ی گزینه‌ها مثبت و بیشتر از ۵۱ است، در دنباله‌ی جدید جمله‌ی اول باید ۱۹ باشد. بنابراین دنباله‌ی جدید به‌صورت زیر قابل نمایش است:

$$19, 35, 51, \ldots \Rightarrow \begin{cases} t'_1 = 19 \\ d' = 35 - 19 = 16 \end{cases} \xrightarrow{t'_n = t_1 + (n-1)d'}$$

$$t'_{10} = 19 + (10 - 1) \times 16 = 19 + 9 \times 16 = 19 + 144 \Rightarrow t'_{10} = 163$$

۱۴۲. گزینه ۲

$$t_1 + t_5 + t_9 = 18$$

$$\xrightarrow[t_n = t_1 + (n-1)d]{\text{همه رو باز کن}} t_1 + (t_1 + 4d) + (t_1 + 8d) = 18$$

$$\xrightarrow{\text{ساده کن}} 3t_1 + 12d = 18 \xrightarrow{\div 3} t_1 + 4d = 6 \quad \boxed{1}$$

$$t_2 + t_m = 12 \xrightarrow{\text{هر دو رو باز کن}} (t_1 + d) + (t_1 + (m-1)d) = 12$$

$$\xrightarrow{\text{ساده کن}} 2t_1 + \cancel{d} + md - \cancel{d} = 12$$

$$\xrightarrow{\text{مرتب کن}} 2t_1 + md = 12 \quad \boxed{2}$$

$$\xrightarrow{\text{با ۱ و ۲ دستگاه بساز}} \begin{cases} t_1 + 4d = 6 \\ 2t_1 + md = 12 \end{cases} \xrightarrow{\times 2} \begin{cases} 2t_1 + 8d = 12 \\ 2t_1 + md = 12 \end{cases}$$

از مقایسه‌ی دو معادله، نتیجه می‌گیریم که m باید برابر ۸ باشد.

۱۴۳. گزینه ۳

$$12, \underbrace{\ldots\ldots\ldots}_{\text{۱۰ واسطه‌ی حسابی}}, 68$$

طبق شکل بالا، جمله‌ی اول برابر ۱۲ و جمله‌ی دوازدهم برابر ۶۸ است. همچنین واسطه‌ی دوم در واقع جمله‌ی سوم خواهد شد و به همین ترتیب واسطه‌های چهارم، هفتم و نهم به‌ترتیب جملات پنجم، هشتم و دهم هستند؛ بنابراین طبق قانون اندیس‌ها داریم:

$$5 + 8 = 12 + 1 \Rightarrow t_5 + t_8 = t_{12} + t_1 \Rightarrow t_5 + t_8 = 68 + 12 = 80$$

$$3 + 10 = 12 + 1 \Rightarrow t_3 + t_{10} = t_{12} + t_1 \Rightarrow t_3 + t_{10} = 68 + 12 = 80$$

بنابراین مجموع واسطه‌های دوم، چهارم، هفتم و نهم برابر است با:

$$t_3 + t_5 + t_8 + t_{10} = 80 + 80 = 160$$

۱۴۴. گزینه ۳

$$\begin{cases} 1, \frac{7}{4}, \frac{10}{4}, \ldots \\ \frac{13}{4}, 3, \frac{11}{4}, \ldots \end{cases}$$

اعداد را نظیربه‌نظیر جمع می‌کنیم و جملات دنباله‌ی جدید را می‌نویسیم:

$$\frac{17}{4}, \frac{19}{4}, \frac{21}{4}, \ldots$$

دنباله‌ی جدید، یک دنباله‌ی حسابی با قدرنسبت $\frac{2}{4}$ و جمله‌ی اول $\frac{17}{4}$ است، بنابراین:

$$t_{51} = t_1 + 50d = \frac{17}{4} + 50 \times \frac{2}{4} = \frac{17 + 100}{4} = \frac{117}{4} = 29\frac{1}{4}$$

۱۴۵. گزینه ۳

گزینه‌ی «۱»: $9^\circ \overset{\times 3}{,} 27^\circ \overset{\times 3}{,} 81^\circ \overset{\times 3}{,} 243^\circ \Rightarrow r = 3$

✓ دنباله‌ی هندسی $\xrightarrow[\text{جمع زوایای داخلی چهارضلعی } 360^\circ \text{ است}]{9^\circ + 27^\circ + 81^\circ + 243^\circ = 360^\circ}$

گزینه‌ی «۲»: قیمت در هر سال، ۱۰ درصدِ سال قبل کم شود

$\xrightarrow{\text{فرم دنباله}}$ قیمت در هر سال، $\underbrace{\text{۹۰ درصدِ}}$ سال قبل است $\xrightarrow{\text{به‌زبان دیگر}}$

$$\text{۹۰ درصد} = \frac{90}{100} = 0/9$$

✓ $a \overset{\times 0/9}{,} 0/9a \overset{\times 0/9}{,} 0/81a, \ldots \xrightarrow{\text{دنباله‌ی هندسی}} r = 0/9$

اگر دنباله‌ای، دنباله‌ی هندسی باشد، آن‌گاه نسبت هر دو جمله‌ی متوالی آن (به‌جز جمله‌ی اول) مقداری ثابت است.

گزینه‌ی «۳»: $\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{3}, \frac{\sqrt{3}}{9}, \frac{1}{27}$

$$\begin{cases} \frac{t_4}{t_3} = \frac{\frac{1}{27}}{\frac{\sqrt{3}}{9}} = \frac{1}{3\sqrt{3}} \xrightarrow[\times\sqrt{3}]{\text{گویا کن}} \frac{\sqrt{3}}{9} \\ \frac{t_3}{t_2} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{9}}{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases} \xrightarrow{\text{مساوی هم نیستند}} \times$$

گزینه‌ی «۴»: $\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, \sqrt[4]{2}, \sqrt[4]{8}, 2\sqrt[4]{2}$

$$\begin{cases} \frac{t_2}{t_1} = \frac{\sqrt[4]{2}}{\frac{1}{\sqrt[4]{2}}} = (\sqrt[4]{2})^2 = \sqrt[4]{2^2} = \sqrt{2} \\ \frac{t_3}{t_2} = \frac{\sqrt[4]{8}}{\sqrt[4]{2}} = \frac{2^{\frac{3}{4}}}{2^{\frac{1}{4}}} = 2^{\frac{3}{4} - \frac{1}{4}} = 2^{\frac{2}{4}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \\ \frac{t_4}{t_3} = \frac{2\sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{8}} = \frac{2^1 \times 2^{\frac{1}{4}}}{\sqrt[4]{2^3}} = \frac{2^{1+\frac{1}{4}}}{2^{\frac{3}{4}}} = \frac{2^{\frac{5}{4}}}{2^{\frac{3}{4}}} = 2^{\frac{5}{4} - \frac{3}{4}} = 2^{\frac{2}{4}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \end{cases}$$

بنابراین این جملات تشکیل یک دنباله‌ی هندسی با قدرنسبت $r = \sqrt{2}$ می‌دهند.

۱۴۶. گزینه ۲ جمله‌ی عمومی دنباله‌ی هندسی به‌صورت $t_n = t_1 r^{n-1}$ است، بنابراین:

$$\begin{cases} t_2 = t_1 r \\ t_9 = t_1 r^8 \\ t_3 = t_1 r^2 \end{cases} \Rightarrow \frac{t_2 t_9}{t_3^2} = \frac{(t_1 r)(t_1 r^8)}{(t_1 r^2)^2}$$

$$\xrightarrow{\text{ساده کن}} \frac{t_2 t_9}{t_3^2} = \frac{\cancel{t_1^2} r^9}{\cancel{t_1^2} r^4} = r^5 \overset{r=4}{=} 4^5 = 1024$$

۱۴۷. گزینه ۱ ابتدا تست را به زبان ریاضی می‌نویسیم:

$$\begin{cases} t_3 = 12 \\ t_6 = 96 \end{cases} \xrightarrow{t_n = t_1 r^{n-1}} \begin{cases} t_3 = t_1 r^2 = 12 \\ t_6 = t_1 r^5 = 96 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{دو رابطه رو بر هم تقسیم کن}} \frac{\cancel{t_1} r^5}{\cancel{t_1} r^2} = \frac{96}{12} \Rightarrow r^3 = 8 \Rightarrow r^3 = 2^3$$

$$\Rightarrow r = 2 \xrightarrow{t_1 r^2 = 12} t_1 \times (2)^2 = 12 \Rightarrow 4t_1 = 12 \Rightarrow t_1 = 3$$

حالا می‌توانیم جمله‌ی دهم را پیدا کنیم:

$$\begin{cases} t_1 = 3 \\ r = 2 \end{cases} \Rightarrow t_{10} = t_1 r^9 = 3 \times 2^9$$

۱۴۸. گزینه ۴ در این سؤال می‌خواهیم نسبت $\frac{t_8}{t_6}$ را حساب کنیم؛ یعنی:

$$\frac{t_8}{t_6} = \frac{\cancel{t_1} r^7}{\cancel{t_1} r^5} = r^2 \quad (*)$$

به عبارتی هدف، محاسبه‌ی r^2 است. با توجه به فرضیات داده‌شده داریم:

$$\begin{cases} t_2 = 9 \xrightarrow{\text{جمله رو بازکن}} t_1 r = 9 \\ t_5 = 243 \xrightarrow{\text{جمله رو بازکن}} t_1 r^4 = 243 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{دو رابطه رو بر هم تقسیم کن}} \frac{\cancel{t_1} r^4}{\cancel{t_1} r} = \frac{243}{9} \Rightarrow r^3 = 27 \Rightarrow r = 3$$

$$\xrightarrow{\text{در } (*)} \frac{t_8}{t_6} = r^2 = 9$$

۱۴۹. گزینه ۳ • **روش اول** با توجه به مطالب گفته‌شده در درسنامه داریم:

$$t_n = 3(-\frac{1}{2})^{2n-1} \xrightarrow[\text{به دست آید } t_1]{\text{ رو ۱ بگذار تا } n} t_1 = 3(-\frac{1}{2})^{2-1} = 3(-\frac{1}{2}) = -\frac{3}{2}$$

همچنین اگر پایه‌ی توان را به توان ضریب n برسانیم، مقدار قدرنسبت به‌دست می‌آید:

$$r = (-\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$$

حالا می‌توانیم مقدار خواسته‌شده را بیابیم:

$$\frac{t_2}{r^2} = \frac{t_1 r}{r^2} = \frac{t_1}{r} = \frac{-\frac{3}{2}}{\frac{1}{4}} = -6$$

روش دوم کافی است جمله‌های اول و دوم دنباله را بنویسید:

$$t_n = 3(-\frac{1}{2})^{2n-1} \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 3(-\frac{1}{2})^{2\times1-1} \\ t_2 = 3(-\frac{1}{2})^{2\times2-1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 3(-\frac{1}{2}) \\ t_2 = 3(-\frac{1}{2})^3 \end{cases}$$

$$r = \frac{t_2}{t_1} = (-\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$$

و سرانجام:

$$\frac{t_2}{r^2} = \frac{3(-\frac{1}{2})^3}{(\frac{1}{4})^2} = \frac{-\frac{3}{8}}{\frac{1}{16}} = \frac{-3\times16}{8} = -6$$

۱۵۰. گزینه ۱ • **روش اول** ابتدا، عبارت خواسته‌شده را ساده می‌کنیم:

$$A = t_{12}t_2 - t_8 t_6 \xrightarrow{\text{همه رو بازکن}} (t_1 r^{11})(t_1 r) - (t_1 r^7)(t_1 r^5)$$

$$\xrightarrow{\text{ساده‌کن}} A = t_1^2 r^{12} - t_1^2 r^{12} = 0$$

روش دوم طبق قانون اندیس‌ها داریم:

$$12 + 2 = 8 + 6 \Rightarrow t_{12}t_2 = t_8 t_6 \Rightarrow t_{12}t_2 - t_8 t_6 = 0$$

۱۵۱. گزینه ۳

راهبرد: هرگاه تعداد جملات یک دنباله‌ی هندسی متناهی، عددی فرد باشد، برای راحتی کار و محاسبات کمتر، بهتر است ابتدا جمله‌ی وسط را نوشته، سپس جملات قبل و بعد از آن را بنویسیم.

این‌جوری:

$$\overset{\div r}{\longleftarrow} \qquad \overset{\times r}{\longrightarrow}$$
$$\ldots, \frac{A}{r^2}, \frac{A}{r}, A, Ar, Ar^2, \ldots$$

اگر جمله‌ی سوم این دنباله را a فرض کنیم، طبق مطلب بالا، ۵ جمله‌ی اول دنباله را به‌صورت مقابل می‌نویسیم:

$$\frac{a}{r^2}, \frac{a}{r}, \underset{\text{جمله‌ی سوم}}{a}, ar, ar^2$$

کاملاً مشخص است که اگر این ۵ جمله را در هم ضرب کنیم، همه‌ی r ها با هم ساده می‌شوند؛ پس:

$$t_1t_2t_3t_4t_5 = a^5 = 1024 \Rightarrow a^5 = 4^5 \Rightarrow a = 4$$

بنابراین جمله‌ی سوم این دنباله، عدد ۴ است.

۱۵۲. گزینه ۳ • **روش اول** طبق مطالب درسنامه داریم:

$$3, \underbrace{\bigcirc, \bigcirc, \bigcirc, \bigcirc}_{\text{چهار واسطه‌ی هندسی}}, 729$$

$$\xrightarrow[m=4]{a=3, b=729} r^{m+1} = \frac{b}{a} \Rightarrow r^5 = \frac{729}{3} \Rightarrow r^5 = 243 = 3^5$$

$$\Rightarrow r = 3 \xrightarrow{\text{حالا جملات رو بنویس}} 3, \underbrace{9, 27, 81, 243}_{\text{واسطه‌های درج‌شده}}, 729$$

$$\text{مجموع چهار واسطه} = 9 + 27 + 81 + 243 = 360$$

روش دوم با توجه به شکل روش اول، جمله‌ی اول و جمله‌ی ششم دنباله‌ی هندسی معلوم است:

$$\begin{cases} t_1 = 3 \\ t_6 = 729 \xrightarrow{\text{ رو بازکن } t_6} t_1 r^5 = 729 \quad (*) \end{cases}$$

$$\xrightarrow[(*)]{t_1 = 3} 3 \times r^5 = 729 \Rightarrow 3 \times r^5 = 3^6 \Rightarrow r^5 = 3^5 \Rightarrow r = 3$$

ادامه‌ی حل، مثل روش اول...

۱۵۳. گزینه ۳ ابتدا با اعمال شرط واسطه‌ی هندسی، مقدار x را می‌یابیم:

$$x, x+3, x+5 \Rightarrow (x+3)^2 = x(x+5)$$

$$\xrightarrow{\text{ساده‌کن}} \cancel{x^2} + 6x + 9 = \cancel{x^2} + 5x \Rightarrow x = -9$$

$$\xrightarrow{\text{قرار بده در جملات}} -9, -6, -4, \ldots \Rightarrow \begin{cases} t_1 = -9 \\ r = \frac{-6}{-9} = \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{جمله‌ی دهم رو بنویس}} t_{10} = t_1 r^9 = (-9)(\frac{2}{3})^9 = \frac{-9 \times 2^9}{3^9}$$

$$\xrightarrow{9 = 3^2} \frac{-2^9}{3^7} \Rightarrow t_{10} = \frac{-512}{2187}$$

۱۵۴. گزینه ۴ فرض می‌کنیم واسطه‌ی هندسی بین این دو عدد a باشد، بنابراین:

$$a^2 = (1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2}) \Rightarrow a^2 = 1 - 2 \Rightarrow a^2 = -1 \Rightarrow \text{نشدنی}$$

۱۵۵. گزینه ۳ • **روش اول** طبق نکات گفته‌شده در درسنامه، داریم:

$$t_3, t_7, t_{12} \xrightarrow{\text{اندیس‌ها رو به ترتیب در نظر بگیرید}} 3, 7, 12$$

$$\xrightarrow{\text{بذار تو فرمول}} r = \frac{\text{دومی} - \text{سومی}}{\text{اولی} - \text{دومی}} \Rightarrow r = \frac{12-7}{7-3} = \frac{5}{4}$$

روش دوم روش کلی:

$$\underbrace{t_3, t_7, t_{12}}_{\text{جملات دنباله‌ی حسابی}} \xrightarrow[\text{دنباله‌ی حسابی بازکن}]{\text{همه رو طبق جمله‌ی عمومی}} \underbrace{t_1 + 2d, t_1 + 6d, t_1 + 11d}_{\text{۳ جمله‌ی متوالی یک دنباله‌ی هندسی}}$$

$$\xrightarrow[\text{رو اعمال کن}]{\text{شرط دنباله‌ی هندسی}} \text{جمله‌ی سومی} \times \text{جمله‌ی اولی} = (\text{جمله‌ی وسطی})^2$$

$$\Rightarrow (t_1 + 6d)^2 = (t_1 + 2d)(t_1 + 11d)$$

$$\xrightarrow{\text{اتحاد رو بازکن}} \cancel{t_1^2} + 12t_1 d + 36d^2 = \cancel{t_1^2} + 13t_1 d + 22d^2$$

$$\xrightarrow{\text{ساده‌کن}} 36d^2 - 22d^2 = 13t_1 d - 12t_1 d \Rightarrow 14d^2 = t_1 d$$

$$\xrightarrow{\div d} t_1 = 14d \xrightarrow[\text{قرار بده } 14d]{\text{در جملات به جای } t_1} 14d + 2d, 14d + 6d, 14d + 11d$$

$$\xrightarrow{\text{ساده‌کن}} 16d, 20d, 25d \xrightarrow{\text{قدرنسبت رو حساب کن}} r = \frac{20d}{16d} = \frac{5}{4}$$

۱۵۶. گزینه ۳

۱) $$x, 4, y \xrightarrow[\text{شرط رو اعمال کن}]{\text{سه جمله‌ی متوالی دنباله‌ی حسابی}} 4 = \frac{x+y}{2} \Rightarrow x + y = 8$$

۲) $$x, y, 18 \xrightarrow[\text{شرط رو اعمال کن}]{\text{سه جمله‌ی متوالی دنباله‌ی هندسی}} y^2 = 18 \times x$$

$$\xrightarrow{\boxed{۱}} \underbrace{x=۸-y}_{\boxed{۳}} \xrightarrow{\text{قراردادن در } \boxed{۲}} y^۲=۱۸(۸-y)$$

$$\xrightarrow[\text{مرتب کن}]{\text{ساده و}} y^۲+۱۸y-۱۸\times۸=۰ \xrightarrow{\text{دستور } \Delta} \Delta=۱۸^۲+۴\times(۱۸\times۸)$$

$$\Rightarrow \Delta=۱۸(۱۸+۴\times۸)=۱۸(۱۸+۳۲)=۱۸\times۵۰=۹۰۰$$

$$\Rightarrow y=\frac{-۱۸\pm۳۰}{۲}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y=\frac{-۱۸-۳۰}{۲}=-۲۴ \xrightarrow{\boxed{۳}} x=۸+۲۴=۳۲ \\ y=\frac{-۱۸+۳۰}{۲}=۶ \xrightarrow{\boxed{۳}} x=۸-۶=۲ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |x-y|=|۳۲-(-۲۴)|=۵۶ \\ |x-y|=|۲-۶|=۴ \end{cases}$$

مقدار $۴=|x-y|$ در گزینه‌ها آمده است.

۱۵۷. (گزینه ۴) ابتدا توجه کنید که جمله‌ی عمومی دنباله‌ای هندسی با قدرنسبت ۳ به‌صورت زیر است:

$$t_n=t_۱r^{n-۱} \xrightarrow{r=۳} t_n=t_۱\times۳^{n-۱}$$

بنابراین: $t_۲=۳t_۱\ ,\ t_۳=۹t_۱$

چهار جمله‌ی اضافه‌شده بین $t_۱$ و $t_۲$ را $b_۱$، $b_۲$، $b_۳$ و $b_۴$ و $k-۱$ جمله‌ی اضافه‌شده بین $t_۲$ و $t_۳$ را $c_۱$، $c_۲$ و... و $c_{k-۱}$ درنظر می‌گیریم. در این‌صورت دنباله‌ی جدید به‌صورت زیر است؛ فرض می‌کنیم جمله‌ی عمومی آن a_n باشد.

$$\underset{\text{جمله‌ی اول دنباله حسابی}}{t_۱}\ ,\ b_۱\ ,\ b_۲\ ,\ b_۳\ ,\ b_۴\ ,\ \underset{\text{جمله‌ی ششم}}{۳t_۱}\ ,\ \underbrace{c_۱\ ,\ c_۲\ ,\ \dots\ ,\ c_{k-۱}}_{\text{k-۱ تا}}\ ,\ \underset{\text{جمله‌ی k+۶ ام}}{۹t_۱}$$

جمله‌ی عمومی دنباله‌ی حسابی به‌صورت $a_n=a_۱+(n-۱)d$ است؛ بنابراین:

$$a_۶=۳t_۱ \Rightarrow \boxed{a_۱}+۵d=۳t_۱ \Rightarrow ۵d=۲t_۱ \quad \boxed{۱}$$

$$t_۱$$

$$a_{k+۶}=۹t_۱ \Rightarrow \boxed{a_۱}+(k+۶-۱)d=۹t_۱ \Rightarrow (k+۵)d=۸t_۱ \quad \boxed{۲}$$

$\boxed{۲}$ را بر $\boxed{۱}$ تقسیم می‌کنیم. (توجه کنید که $t_۱\neq۰$ و $d\neq۰$ است، چون جمله‌ی اول هر دنباله‌ی هندسی ناصفر است و جمله‌های دنباله‌ی هندسی طبق فرض متمایز هستند.)

$$\frac{k+۵}{۵}=۴ \Rightarrow k+۵=۲۰ \Rightarrow k=۱۵$$

۱۵۸. (گزینه ۳) در سؤال گفته شده که قیمت دوچرخه‌ی علی هر سال ۲۰ درصد نسبت به سال قبل کاهش می‌یابد یا به‌عبارت دیگر قیمت دوچرخه در هر سال ۸۰ درصد سال قبل است. ۸۰٪ یعنی $\frac{۸۰}{۱۰۰}$ یا ۰/۸؛ بنابراین دنباله‌ی قیمت دوچرخه‌ی علی در سال‌های مختلف به‌صورت زیر است:

$$۵۰۰,۵۰۰\times۰/۸,۵۰۰\times۰/۸\times۰/۸,\dots$$

یا به‌عبارتی:

$$\underbrace{۵۰۰}_{\text{خرید دوچرخه}}\ ,\ \underbrace{۵۰۰\times۰/۸}_{\text{سال اول}}\ ,\ \underbrace{۵۰۰\times(۰/۸)^۲}_{\text{سال دوم}}\ ,\ \dots\ ,\ \underbrace{۵۰۰\times(۰/۸)^k}_{\text{سال kام}}$$

قیمت دوچرخه بعد از ۳ سال، یعنی جمله‌ی چهارم در دنباله‌ی بالا؛ پس:

$$t_n=t_۱r^{n-۱} \xrightarrow{n=۴} t_۴=۵۰۰\times(۰/۸)^۳=۵۰۰\times۰/۵۱۲=۲۵۶$$

۱۵۹. (گزینه ۲) • **روش اول** کافی است دو جمله‌ی اول دنباله را بنویسیم:

$$\begin{cases} t_۱=\frac{۳^{۱+۲}}{۴}=\frac{۳^۳}{۴}=\frac{۲۷}{۴} \quad \boxed{۱} \\ t_۲=\frac{۳^{۱+۲\times۲}}{۴}=\frac{۳^۵}{۴} \end{cases}$$

قدرنسبت در دنباله‌ی هندسی از تقسیم دو جمله‌ی متوالی به‌دست می‌آید؛ بنابراین:

$$r=\frac{t_۲}{t_۱}=\frac{\frac{۳^۵}{\cancel{۴}}}{\frac{۳^۳}{\cancel{۴}}}=۳^۲=۹ \quad \boxed{۲}$$

$$\xrightarrow{\boxed{۱} \text{ و } \boxed{۲}} |t_۱-r|=|\frac{۲۷}{۴}-۹|=|\frac{۲۷-۳۶}{۴}| \Rightarrow |t_۱-r|=\frac{۹}{۴}$$

• **روش دوم** طبق نکته‌ی گفته‌شده در درسنامه، داریم:

$$t_n=\frac{۳^۱\times۳^{۲n}}{۴}=\frac{۳}{۴}\times۳^{۲n} \xrightarrow[\text{برسون تا قدرنسبت پیدا بشه}]{\text{پایه‌ی توان رو به توان ضریب n}}$$

$$r=۳^۲=۹ \xrightarrow[\text{و } t_۱ \text{ رو پیدا کن}]{\text{n رو ۱ بذار}} t_۱=\frac{۳^{۱+(۲\times۱)}}{۴}=\frac{۳^۳}{۴}=\frac{۲۷}{۴}$$

$$\Rightarrow |t_۱-r|=|\frac{۲۷}{۴}-۹|=\frac{۹}{۴}$$

۱۶۰. (گزینه ۳) • **روش اول** کافی است همه‌ی جملات را طبق رابطه‌ی $t_n=t_۱r^{n-۱}$ ساده کنیم:

$$\frac{t_۲t_۴t_۸}{t_۵^۳}=۲۵ \xrightarrow{\text{همه‌ی جملات رو باز کن}} \frac{(t_۱r)(t_۱r^۳)(t_۱r^۷)}{(t_۱r^۴)^۳}=۲۵$$

$$\xrightarrow{\text{ساده کن}} \frac{t_۱^۳\, r^{۱+۳+۷}}{t_۱^۳(r^۴)^۳}=۲۵ \Rightarrow \frac{\cancel{t_۱^۳}\, r^{۱۱}}{\cancel{t_۱^۳}\, r^{۱۲}}=۲۵$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{r}=۲۵ \Rightarrow r=\frac{۱}{۲۵}$$

• **روش دوم** چون $۵+۵=۲+۸$ است، پس طبق قانون اندیس‌ها داریم:

$$t_۲t_۸=t_۵^۲ \quad \boxed{*}$$

بنابراین داریم:

$$\frac{t_۲\ t_۴\ t_۸}{t_۵^۳}=\frac{t_۵^۲\,t_۴}{t_۵^۳}=\frac{t_۴}{t_۵}=۲۵$$

پس:

$$\frac{t_۵}{t_۴}=\frac{۱}{۲۵} \xrightarrow[\text{برابر r است.}]{\text{نسبت دو جمله‌ی متوالی}} r=\frac{۱}{۲۵}$$

۱۶۱. (گزینه ۲) مسئله را به زبان ریاضی بازنویسی می‌کنیم:

$$\begin{cases} t_{۱۱}-t_۹=\frac{۱}{۲۴۳} \quad \boxed{*} \\ r=\frac{۱}{۳} \end{cases}$$

$$\xrightarrow[t_n=t_۱r^{n-۱}]{\text{رابطه‌ی } \boxed{*} \text{ رو ساده کن}} t_۱r^{۱۰}-t_۱r^۸=\frac{۱}{۲۴۳}$$

$$\xrightarrow{\text{از } t_۱r^۸ \text{ فاکتور بگیر}} t_۱r^۸(r^۲-۱)=\frac{۱}{۲۴۳}$$

$$\xrightarrow{r=\frac{۱}{۳}} t_۱(\frac{۱}{۳})^۸((\frac{۱}{۳})^۲-۱)=\frac{۱}{۲۴۳}$$

$$\xrightarrow{\frac{۱}{۲۴۳}=(\frac{۱}{۳})^۵} t_۱(\frac{۱}{۳})^۸(\frac{۱}{۹}-۱)=(\frac{۱}{۳})^۵$$

$$\xrightarrow{\times۳^۸} t_۱(\frac{۱}{۹}-۱)=۳^۳ \Rightarrow t_۱\times(\frac{-۸}{۹})=۲۷$$

$$\xrightarrow{\times(-\frac{۹}{۸})} t_۱=۲۷\times(-\frac{۹}{۸})=\frac{-۲۷\times۹}{۸}$$

و اما جمله‌ی دوم:

$$t_۲=t_۱r=\frac{-۲۷\times۹}{۸}\times\frac{۱}{۳}=\frac{-۸۱}{۸}$$

۱۶۲. گزینه۴ فرض کنیم $t_n = \frac{1}{3125}$ باشد. با توجه به دنباله‌ی داده‌شده، هر جمله در عدد $-\frac{1}{5}$ ضرب شده است، پس این دنباله یک دنباله‌ی هندسی با قدرنسبت $-\frac{1}{5}$ و جمله‌ی اول ۲۵- است؛ بنابراین:

$$t_n = t_1 r^{n-1} \Rightarrow \frac{1}{3125} = (-25)(-\frac{1}{5})^{n-1}$$

$$\xrightarrow{\div(-25)} -\frac{1}{25\times 3125} = (-\frac{1}{5})^{n-1} \Rightarrow \frac{-1}{5^2\times 5^5} = (-\frac{1}{5})^{n-1}$$

$$\Rightarrow \frac{-1}{5^7} = \frac{(-1)^{n-1}}{5^{n-1}} \xrightarrow[(-1)^{n-1}=-1]{\text{عددی فرد است } n-1} \frac{1}{5^7} = \frac{1}{5^{n-1}}$$

$$\xrightarrow{\text{مقایسه کن}} n-1 = 7 \Rightarrow n = 8$$

۱۶۳. گزینه ۱ طبق راهبرد گفته‌شده در سوال ۱۵۱، پنج جمله‌ی اول دنباله را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\frac{a}{r^2}, \frac{a}{r}, a, ar, ar^2$$

$$\text{حاصل‌ضرب پنج جمله} = 243 \Rightarrow \frac{a}{\cancel{r^2}} \times \frac{a}{\cancel{r}} \times a \times a\cancel{r} \times a\cancel{r^2} = 243$$

$$\Rightarrow a^5 = 243 \xrightarrow{243=3^5} a^5 = 3^5 \Rightarrow a = 3$$

از طرفی، مجموع دو جمله‌ی نخست را هم داریم:

$$\frac{a}{r^2} + \frac{a}{r} = 1+\sqrt{3} \xrightarrow{a=3} \frac{3}{r^2} + \frac{3}{r} = 1+\sqrt{3}$$

$$\xrightarrow{\text{ساده‌کن}} \frac{3+3r}{r^2} = 1+\sqrt{3} \xrightarrow{\text{ساده‌کن}} 3+3r = (1+\sqrt{3})r^2$$

$$\xrightarrow{\text{مرتب‌کن}} (1+\sqrt{3})r^2 - 3r - 3 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{دستور }\Delta} \Delta = 9 - 4(1+\sqrt{3})(-3)$$

$$\Rightarrow \Delta = 9+12+12\sqrt{3} = 21+12\sqrt{3} = 9+12\sqrt{3}+12$$

$$= 3^2 + 2(3\times 2\sqrt{3}) + (2\sqrt{3})^2 = (3+2\sqrt{3})^2$$

$$\xrightarrow{\text{رو پیدا کن } r} r = \frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3\pm(3+2\sqrt{3})}{2(1+\sqrt{3})} \overset{r>0}{=\!=} \frac{6+2\sqrt{3}}{2(1+\sqrt{3})}$$

$$= \frac{2\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{2(\sqrt{3}+1)} \Rightarrow r = \sqrt{3}$$

۱۶۴. گزینه۳ • روش اول

$$\underbrace{4, \underbrace{\bigcirc, \bigcirc, \dots, \overset{t_{16}=\text{جمله‌ی وسط}}{\overset{\uparrow}{\bigcirc}}, \dots, \bigcirc, \bigcirc}_{\text{۲۹عدد}}, 400}_{\text{۳۱=تعداد کل جملات}}$$

با توجه به شکل $t_1 = 4$ و $t_{31} = 400$ است. باید t_{16} را حساب کنیم. چون $16+16 = 31+1$ است، پس با توجه به قانون اندیس‌ها داریم:

$$t_1 t_{31} = t_{16}^2 \Rightarrow 4(400) = t_{16}^2 \Rightarrow t_{16} = \pm 40$$

: روش دوم

$$\frac{\text{جمله‌ی آخر}}{\text{جمله‌ی اول}} = r^{m+1} \Rightarrow \frac{400}{4} = r^{29+1} \Rightarrow 100 = r^{30} \Rightarrow r = \pm\sqrt[30]{10^2}$$

$$\Rightarrow r = \pm\sqrt[15]{10}$$

$$\xrightarrow{\text{جمله‌ی عمومی رو بنویس}} t_n = t_1 r^{n-1} \xrightarrow{n=16} t_{16} = 4\times(\pm\sqrt[15]{10})^{15}$$

$$= 4\times\pm 10 = \pm 40$$

۱۶۵. گزینه۳ با توجه به فرض سوال، جملات t_1، t_3، t_5 و... را حذف می‌کنیم. در این‌صورت جملات دنباله عبارت‌اند از:

$$t_2, t_4, t_6, \dots \xrightarrow{t_n=4n-3} 5, 13, 21, \dots$$

دنباله‌ی جدید هم یک دنباله‌ی حسابی با قدرنسبت ۸ است:

$$d = 13-5 = 21-13 = 8$$

راهبرد: به‌طور کلی، اگر در یک دنباله‌ی حسابی، همه‌ی جملات با شماره‌ی فرد یا همه‌ی جملات با شماره‌ی زوج را حذف کنیم، دنباله‌ی حاصل باز هم یک دنباله‌ی حسابی خواهد بود با این تفاوت که قدرنسبت آن نسبت به حالت اول، ۲ برابر می‌شود.

۱۶۶. گزینه۳ در این دنباله، جملات در حال کم‌شدن هستند، بنابراین بزرگ‌ترین جمله همان جمله‌ی اول است. از طرفی در این دنباله مقدار دو جمله معلوم است؛ بنابراین:

$$\begin{cases} t_3 = \frac{1}{3} \\ t_6 = \frac{1}{24} \end{cases} \xrightarrow[t_n=t_1r^{n-1}]{\text{جمله رو بازکن}} \begin{cases} t_1 r^2 = \frac{1}{3} \\ t_1 r^5 = \frac{1}{24} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{دو جمله رو بر هم تقسیم کن}} \frac{t_1 r^5}{t_1 r^2} = \frac{\frac{1}{24}}{\frac{1}{3}} \Rightarrow r^3 = \frac{1}{8} \Rightarrow r = \frac{1}{2}$$

$$\xrightarrow{t_1 r^2 = \frac{1}{3}} t_1 \times (\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow t_1 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{3} \xrightarrow{\times 4} t_1 = \frac{4}{3} = a$$

۱۶۷. گزینه۲ سه جمله‌ی اول دنباله را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\underbrace{\frac{a}{r}}_{t_1}, \underbrace{a}_{t_2}, \underbrace{ar}_{t_3}$$

طبق فرض‌های مسئله داریم:

$$t_1 t_2 t_3 = 216 \Rightarrow \frac{a}{\cancel{r}} \times a \times a\cancel{r} = 216 \Rightarrow a^3 = 216$$

$$\xrightarrow{216=6^3} a^3 = 6^3 \Rightarrow a = 6$$

از طرفی داریم:

$$t_1 + t_2 + t_3 = 19 \Rightarrow \frac{a}{r} + a + ar = 19 \xrightarrow{a=6} \frac{6}{r} + 6 + 6r = 19$$

$$\xrightarrow{\times r} 6 + 6r + 6r^2 = 19r \xrightarrow{\text{مرتب‌کن}} 6r^2 - 13r + 6 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{دستور }\Delta} r = \frac{13\pm\sqrt{169-4\times6\times6}}{2\times6}$$

$$\xrightarrow{\text{ساده‌کن}} r = \frac{13\pm\sqrt{169-144}}{12} \Rightarrow r = \frac{13\pm5}{12} \Rightarrow \begin{cases} r = \frac{3}{2} \\ r = \frac{2}{3} \end{cases}$$

با قراردادن $r = \frac{3}{2}$ و $a = 6$، جملات به‌صورت زیر درمی‌آیند:

$$\frac{a}{r}, a, ar \Rightarrow \frac{6}{\frac{3}{2}}, 6, 6\times\frac{3}{2} \xrightarrow{\text{ساده‌کن}} 4, 6, 9$$

با قرار دادن $r = \frac{2}{3}$، دنباله‌ی مقابل به‌دست می‌آید: ۹،۶،۴

بنابراین در هر دو حالت، تفاضل بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین این سه عدد ۴ − ۹ یا همان ۵ است.

۱۶۸. گزینه۲ با کمی دقت متوجه می‌شویم که در تمام مخرج‌ها، مجموع اندیس‌ها در حاصل‌ضرب دو جمله‌ی داده‌شده برابر ۲۰است، یعنی مخرج همه‌ی کسرها با هم برابرند. نگاه‌کن:

$$t_1 t_{19} = t_1(t_1 r^{18}) = t_1^2 r^{18}$$

$$t_2 t_{18} = (t_1 r)(t_1 r^{17}) = t_1^2 r^{18}$$

$$\vdots$$

بنابراین به جای مخرج همه‌ی کسرها $t_1^2 r^{18}$ قرار می‌دهیم و از آنجایی که تعداد این کسرها ۱۰ تاست، داریم:

$$\text{کسر} = \underbrace{\frac{4}{t_1^2 r^{18}} + \frac{4}{t_1^2 r^{18}} + \cdots + \frac{4}{t_1^2 r^{18}}}_{\text{تا}\,10} = 10 \times \frac{4}{t_1^2 r^{18}}$$

$$\xrightarrow{r=\sqrt[6]{2},\ t_1=\frac{1}{2}} \text{کسر} = \frac{40}{(\frac{1}{2})^2(\sqrt[6]{2})^{18}} = \frac{40}{\frac{1}{4}\times\sqrt[6]{2^{18}}} = \frac{40}{\frac{1}{4}\times 2^3}$$

$$= \frac{40}{\frac{1}{4}\times 8} \Rightarrow \text{کسر} = \frac{40}{2} = 20$$

۱۶۹. گزینه۳ جملات سوم، هفتم و نهم یک دنباله‌ی حسابی با جمله‌ی اول t_1 و قدرنسبت d به‌صورت زیر است:

$$t_3 = t_1 + 2d\ ,\ t_7 = t_1 + 6d\ ,\ t_9 = t_1 + 8d$$

از طرفی اگر a، b و c سه جمله‌ی متوالی یک دنباله‌ی هندسی باشند، آن‌گاه: $b^2 = ac$؛ بنابراین:

$$t_7^2 = t_3 t_9 \Rightarrow (t_1 + 6d)^2 = (t_1 + 2d)(t_1 + 8d)$$

$$\Rightarrow t_1^2 + 12t_1 d + 36d^2 = t_1^2 + 10t_1 d + 16d^2 \Rightarrow 2t_1 d + 20d^2 = 0$$

$$\Rightarrow 2d(t_1 + 10d) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2d = 0 \Rightarrow d = 0 \quad \text{غ ق ق} \\ t_1 + 10d = 0 \xrightarrow{t_n = t_1 + (n-1)d} t_{11} = 0 \end{cases}$$

۱۷۰. گزینه۱ جملات دنباله‌ی داده‌شده، توان‌هایی از ۲ هستند. **نگاه کن:**

$$2, 2^2, 2^3, \ldots$$

بنابراین حاصل‌ضرب بیست جمله‌ی نخست آن، یعنی از ۲ تا 2^{20}، به‌صورت روبه‌رو است: $2\times 2^2 \times 2^3 \times \cdots \times 2^{20} = 2^n$

در ضرب توان‌ها می‌دانیم که وقتی پایه‌ها مشترک‌اند، توان‌ها را با هم جمع می‌کنیم؛ پس: $n = 1+2+3+\cdots+20 = \frac{20(20+1)}{2} = 210$

$$\Rightarrow 2\times 2^2 \times 2^3 \times \cdots \times 2^{20} = 2^{210}$$

بنابراین حاصل‌ضرب بیست جمله‌ی نخست این دنباله برابر 2^{210} است.

۱۷۱. گزینه۲ در این سؤال گفته شده است که هر سال به اندازه‌ی ۰/۱ از جمعیت کم می‌شود، به‌عبارت دیگر می‌توان گفت هر سال جمعیت این روستا ۰/۹ سال قبل است. الگوی زیر را می‌توان برای جمعیت این روستا نوشت:

$$1000,\ \underbrace{1000\times 0/9}_{\text{گذشت یک سال}},\ \underbrace{1000\times 0/9\times 0/9}_{\text{گذشت دو سال}},\ \ldots$$

یا به‌صورت ساده‌تر:

$$1000 \xrightarrow{\text{۱ سال}} 900 \xrightarrow{\text{۲ سال}} 810 \xrightarrow{\text{۳ سال}} 729,\ \ldots$$

حتماً متوجه شده‌اید که دنباله‌ی بالا، یک دنباله‌ی هندسی با قدرنسبت ۰/۹ است.

۱۷۲. گزینه۳ با توجه به مفروضات مسئله داریم:

$$\begin{cases} t_2 t_6^2 = \frac{4}{5} \\ t_9^2 t_{10} = \frac{8}{7} \end{cases} \xrightarrow[\text{همه‌ی جمله‌ها رو باز کن}]{t_n = t_1 r^{n-1}} \begin{cases} (t_1 r)(t_1 r^5)^2 = \frac{4}{5} \\ (t_1 r^8)^2 (t_1 r^9) = \frac{8}{7} \end{cases}$$

$$\xrightarrow[\text{قوانین توان}]{\text{ساده‌کن}} \begin{cases} (t_1 r)(t_1^2 r^{10}) = \frac{4}{5} \\ (t_1^2 r^{16})(t_1 r^9) = \frac{8}{7} \end{cases} \xrightarrow{\text{باز هم ساده‌کن}} \begin{cases} t_1^3 r^{11} = \frac{4}{5} \\ t_1^3 r^{25} = \frac{8}{7} \end{cases}$$

$$\xrightarrow[\text{هم تقسیم کن}]{\text{دو رابطه رو بر}} \frac{\cancel{t_1^3} r^{25}}{\cancel{t_1^3} r^{11}} = \frac{\frac{8}{7}}{\frac{4}{5}} \Rightarrow r^{25-11} = \frac{8\times 5}{4\times 7} \xrightarrow{\text{ساده‌کن}} r^{14} = \frac{10}{7}$$

حال باید نسبت $\frac{t_{20}}{t_6}$ را بیابیم. هر دو جمله را باز می‌کنیم:

$$\frac{t_{20}}{t_6} = \frac{\cancel{t_1} r^{19}}{\cancel{t_1} r^5} = r^{19-5} = r^{14} = \frac{10}{7}$$

۱۷۳. گزینه۳ ● روش اول در صورتی که جمله‌ی عمومی دنباله t_n باشد، مسئله از ما خواسته که عبارت زیر را حساب کنیم:

$$A = \frac{t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5}{t_1} = ?$$

باتوجه‌به‌اینکه در دنباله‌ی هندسی $t_n = t_1 r^{n-1}$ است، همه‌ی جمله‌ها را باز می‌کنیم:

$$A = \frac{t_1 + t_1 r + t_1 r^2 + t_1 r^3 + t_1 r^4}{t_1} \overset{\div t_1}{=} 1 + r + r^2 + r^3 + r^4$$

$$\xrightarrow{r=-2} A = 1 - 2 + 4 - 8 + 16 \Rightarrow A = 11$$

● روش دوم می‌توان دنباله‌ای دلخواه با قدرنسبت ۲- را $1, -2, 4, -8, 16, \ldots$ درنظر گرفت؛ بنابراین:

$$\frac{\text{مجموع پنج جمله‌ی اول}}{\text{جمله‌ی اول}} = 1 - 2 + 4 - 8 + 16 = 11$$

۱۷۴. گزینه۳

$$2^{-a}, 2\sqrt{2}, 8 \xrightarrow{\text{شرط واسطه‌ی هندسی}} (2\sqrt{2})^2 = 2^{-a} \times 8$$

$$\xrightarrow{\text{ساده‌کن}} 4\times 2 = 2^{-a}\times 8 \Rightarrow 1 = 2^{-a} \xrightarrow{1=2^0} 2^0 = 2^{-a} \Rightarrow a = 0$$

$$2\sqrt{2}, 8, 4^b \xrightarrow{\text{شرط واسطه‌ی هندسی}} 8^2 = 2\sqrt{2}\times 4^b$$

$$\xrightarrow{\text{همه رو توانی کن}} (2^3)^2 = 2\times 2^{\frac{1}{2}} \times (2^2)^b$$

$$\xrightarrow{\text{ساده‌کن}} 2^6 = 2^{\frac{3}{2}} \times 2^{2b} \Rightarrow 2^6 = 2^{\frac{3}{2}+2b} \Rightarrow 6 = \frac{3}{2} + 2b$$

$$\Rightarrow 2b = 6 - \frac{3}{2} \Rightarrow 2b = \frac{9}{2} \Rightarrow b = \frac{9}{4}$$

$$\Rightarrow a + b = 0 + \frac{9}{4} = \frac{9}{4}$$

۱۷۵. گزینه۲ چهار جمله‌ی اول این دنباله را با t_4، t_3، t_2، t_1 نمایش می‌دهیم. اگر t_1 کوچک‌ترین آن‌ها باشد، طبق فرضیات مسئله داریم:

$$\begin{cases} t_1 + t_2 = 3 \\ t_3 + t_4 = 75 \end{cases} \xrightarrow{\text{جمله‌ها رو باز کن}} \begin{cases} t_1 + t_1 r = 3 \\ t_1 r^2 + t_1 r^3 = 75 \end{cases}$$

دو رابطه را بر هم تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{t_1 r^2 + t_1 r^3}{t_1 + t_1 r} = \frac{75}{3} \Rightarrow \frac{t_1 r^2 (1+r)}{t_1 (1+r)} = 25 \xrightarrow{\text{ساده‌کن}} r^2 = 25$$

$$\xrightarrow[r>0]{\text{جملات مثبت هستند}} r = 5 \xrightarrow{t_1 + t_1 r = 3} t_1 + 5t_1 = 3$$

$$\Rightarrow 6t_1 = 3 \Rightarrow t_1 = \frac{1}{2}$$

حال با داشتن $t_1 = \frac{1}{2}$ و $r = 5$، جملات دنباله را می‌نویسیم:

$$\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, \frac{25}{2}, \frac{125}{2}$$

اگر t_1 بزرگ‌ترین جمله بین چهار جمله‌ی اول دنباله باشد، روش حل باز هم به همین صورت است.

۱۷۶. گزینه۳ قدرنسبت دنباله‌ی حسابی ۶ است ($d = 6$)، پس دنباله‌ی هندسی به‌صورت زیر است:

$$\xrightarrow{r=6,\ t_1=\frac{8}{27}} \frac{8}{27}, \frac{16}{9}, \frac{32}{3}, 64, 384, \ldots$$

جملات این دنباله از جمله‌ی پنجم به بعد، مضرب صحیح ۳ هستند. از آن‌جا که دنباله‌ی حسابی موردنظر به‌صورت $t_n = 4 + 6(n-1)$ است، بنابراین فقط عدد ۶۴ چون صحیح است و مضرب صحیح ۳ نیست، می‌تواند بین دو دنباله مشترک باشد. در نتیجه:

$$4 + 6(n-1) = 64 \Rightarrow 6(n-1) = 60 \Rightarrow n - 1 = 10 \Rightarrow n = 11$$

۱۷۷. گزینه ۳

$$\underbrace{t_3, t_6, t_{10}}_{\text{جملات از دنباله‌ی حسابی}} \xrightarrow{\text{همه رو باز کن}} \underbrace{t_1+2d, t_1+5d, t_1+9d}_{\text{سه جمله‌ی متوالی دنباله‌ی هندسی}}$$

$$\xrightarrow{\text{شرط واسطه‌ی هندسی}} (t_1+5d)^2 = (t_1+2d)(t_1+9d)$$

$$\xrightarrow{\text{اتحادها رو انجام بده}} \cancel{t_1^2} + 10t_1d + 25d^2 = \cancel{t_1^2} + 11t_1d + 18d^2$$

$$\xrightarrow{\text{ساده کن}} 25d^2 - 18d^2 = 11t_1d - 10t_1d \Rightarrow 7d^2 = t_1d$$

$$\xrightarrow{\div d} t_1 = 7d \quad ❋$$

حال باید نسبت جمله‌ی یازدهم به جمله‌ی چهارم دنباله‌ی حسابی را بیابیم:

$$\frac{t_{11}}{t_4} = \frac{t_1+10d}{t_1+3d} \xrightarrow{❋} \frac{t_{11}}{t_4} = \frac{7d+10d}{7d+3d} = \frac{17d}{10d} = 1/7$$

۱۷۸. گزینه ۲ با اطلاعات داده‌شده سه جمله‌ی دنباله‌ی حسابی را می‌نویسیم:

$$\underbrace{18-d, 18, 18+d}_{\text{دنباله‌ی حسابی}} \xrightarrow[\text{۷۵ واحد اضافه کن}]{\text{به جمله‌ی سوم}} \underbrace{18-d, 18, 18+75+d}_{\text{سه جمله‌ی متوالی دنباله‌ی هندسی}}$$

$$\xrightarrow{\text{ساده کن}} \underbrace{18-d, 18, 93+d}_{❋}$$

$$\xrightarrow[\text{هندسی رو اعمال کن}]{\text{شرط واسطه‌ی}} 18^2 = (18-d)(93+d)$$

$$\Rightarrow 18^2 = 18\times93 + 18d - 93d - d^2$$

$$\xrightarrow{\text{مرتب کن}} d^2 + 93d - 18d + 18^2 - 18\times93 = 0$$

$$\Rightarrow d^2 + 75d + 18(18-93) = 0 \Rightarrow d^2 + 75d - 18\times75 = 0$$

$$\xrightarrow{18\times75=18\times(5\times15)=90\times15} d^2 + 75d - 90\times15 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{تجزیه کن}} (d+90)(d-15) = 0 \Rightarrow \begin{cases} d=-90 \\ d=15 \end{cases}$$

$$\xrightarrow[❋]{\text{قرار بده در جملات}} \begin{cases} d=-90 \Rightarrow 18+90, 18, 93-90 \\ \xrightarrow{\text{ساده کن}} 108, 18, 3 \Rightarrow r = \frac{3}{18} = \frac{1}{6} \\ d=15 \Rightarrow 18-15, 18, 93+15 \\ \xrightarrow{\text{ساده کن}} 3, 18, 108 \Rightarrow r = \frac{18}{3} = 6 \end{cases}$$

عدد ۶ در گزینه‌ها آمده است.

۱۷۹. گزینه ۲ • **روش اول** در هر شکل تعداد نقطه‌ها از شماره‌ی آن شکل یک واحد بیشتر است، پس در شکل nاُم، $n+1$ نقطه وجود دارد، از طرفی در هر شکل، تعداد کل پاره‌خط‌های قابل رسم بین نقاط موجود رسم شده است. پس در شکل nاُم که $n+1$ نقطه داریم، تعداد کل پاره‌خط‌های قابل رسم (t_n) بین این نقاط برابر است با:

$$t_n = \binom{n+1}{2} \xrightarrow{n=10} t_{10} = \binom{11}{2} = \frac{11\times10}{2} = 55$$

: **روش دوم** با کمی دقت متوجه می‌شویم که تعداد پاره‌خط‌های رسم‌شده در شکل‌های داده‌شده، تشکیل یک دنباله‌ی مثلثی می‌دهند، ببینید: $1, 3, 6, 10, \ldots$

در هر دنباله‌ی مثلثی، هر جمله از رابطه‌ی $t_n = \frac{n(n+1)}{2}$ به‌دست می‌آید، پس در شکل دهم تعداد پاره‌خط‌ها برابر است با:

$$t_{10} = \frac{10\times11}{2} = 55$$

۱۸۰. گزینه ۴ • **روش اول** سعی می‌کنیم یک الگوی مناسب برای اولین و آخرین جمله‌ی هر دسته پیدا کنیم:

شماره‌ی دسته	۱	۲	۳	۴	...	n
اولین عدد دسته	۱	۳	۷	۱۳	...	
الگوی مناسب	1^2-0	2^2-1	3^2-2	4^2-3	...	$n^2-(n-1)$

$\Rightarrow$ اولین عدد هر دسته $= n^2 - n + 1$

شماره‌ی دسته	۱	۲	۳	۴	...	n
آخرین عدد دسته	۱	۵	۱۱	۱۹	...	
الگوی مناسب	1^2+0	2^2+1	3^2+2	4^2+3	...	$n^2+(n-1)$

$\Rightarrow$ آخرین عدد هر دسته $= n^2 + n - 1$

پس به‌طور کلی، اگر اولین عدد در دسته‌ی nاُم را با a_n و آخرین عدد دسته‌ی nاُم را با b_n نشان دهیم، داریم:

$$\begin{cases} a_n = n^2 - n + 1 \\ b_n = n^2 + n - 1 \end{cases} \xrightarrow[n=10]{\text{دسته‌ی دهم}} \begin{cases} a_{10} = 10^2 - 10 + 1 = 91 \\ b_{10} = 10^2 + 10 - 1 = 109 \end{cases}$$

$$\Rightarrow b_{10} - a_{10} = 109 - 91 = 18$$

: **روش دوم** اگر تفاضل بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین عدد در هر دسته را بنویسیم، به الگوی زیر می‌رسیم:

۰ ، ۲ ، ۴ ، ۶ ، ۸ ، ۱۰ ، ۱۲ ، ۱۴ ، ۱۶ ، ۱۸ ، ...

(۱−۱) (۵−۳) (۱۱−۷) (۱۹−۱۳) ... دسته‌ی دهم

۱۸۱. گزینه ۲ ابتدا اولین جمله‌ی مشترک این دو دنباله را می‌یابیم:

$$\begin{cases} 3 \xrightarrow{+3} 6 \xrightarrow{+3} 9 \xrightarrow{+3} \underline{12}, \ldots \\ 4 \xrightarrow{+4} 8 \xrightarrow{+4} \underline{12}, \ldots \end{cases}$$

بنابراین اولین جمله‌ی مشترک این دو دنباله، ۱۲ است. اگر دقت کرده باشید، قدرنسبت دنباله‌ی اولی برابر ۳ و قدرنسبت دنباله‌ی دومی ۴ است. برای این‌که در ریاضی بین دو عدد، مقادیر مشترک را برداریم (ویژگی که هر دو عدد در آن نقش داشته باشند)، باید ک.م.م آن دو عدد را در نظر بگیریم. در اینجا ک.م.م ۳ و ۴، عدد ۱۲ می‌شود. پس برای داشتن جملات مشترک دو دنباله، دنباله‌ی جدیدی طراحی می‌کنیم که جمله‌ی اول آن ۱۲ و قدرنسبت آن هم ۱۲ (ک.م.م ۳ و ۴) باشد؛ بنابراین جملات دنباله به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$12, 24, 36, \ldots \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 12 \\ d = 12 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{t_n = t_1 + (n-1)d} t_n = 12 + (n-1)\times12 \xrightarrow{\text{ساده کن}} t_n = 12n$$

(دنباله‌ای که جملات مشترک دو دنباله را تولید می‌کند.)

حال باید جمله‌ی چهلم هر دو دنباله را بیابیم:

$$\begin{cases} 3, 6, 9, \ldots \xrightarrow{t_1=3, d=3} t_{40} = 3 + (40-1)\times3 = 120 \\ 4, 8, 12, \ldots \xrightarrow{t_1=4, d=4} t_{40} = 4 + (40-1)\times4 = 160 \end{cases}$$

بنابراین تا جمله‌ی چهلم دو دنباله، اگر جمله‌ی مشترکی وجود داشته باشد، آن جمله باید کوچک‌تر یا مساوی ۱۲۰ باشد. (چرا؟)

از طرفی اولین جمله‌ی مشترک دو دنباله هم ۱۲ بود، پس با توجه به دنباله‌ی $t_n = 12n$، نتیجه می‌گیریم که: $12 \le 12n \le 120 \xrightarrow{\div 12} 1 \le n \le 10$
یعنی این دو دنباله ۱۰ جمله‌ی مشترک دارند. این جملات عبارت‌اند از:
۱۲،۲۴،۳۶،۴۸،۶۰،۷۲،۸۴،۹۶،۱۰۸،۱۲۰

۱۸۲. گزینه ۱ دنباله‌های زیر را در نظر بگیرید:

$$\underset{t_1}{\overset{1}{\downarrow}},\underbrace{\_,\_,\overset{t_4}{A},\_,\_}_{\text{پنج واسطه‌ی حسابی}},\underset{t_7}{\overset{64}{\downarrow}} \qquad \underset{t'_1}{\overset{1}{\downarrow}},\underbrace{\_,\_,\overset{t'_4}{B},\_,\_}_{\text{پنج واسطه‌ی هندسی}},\underset{t'_7}{\overset{64}{\downarrow}}$$

با توجه به قانون اندیس‌ها در دنباله‌های حسابی و هندسی داریم:

$$1+7=4+4 \begin{cases} \xrightarrow{\text{دنباله‌ی حسابی}} t_1+t_7=2t_4 \\ \xrightarrow{\text{دنباله‌ی هندسی}} t'_1t'_7=t'^2_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1+64=2A \\ 1\times 64=B^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2A=65 \Rightarrow A=\frac{65}{2}=32/5 \\ B^2=64 \Rightarrow B=\pm 8 \end{cases}$$

با توجه به گزینه‌ها پاسخ درست گزینه‌ی «۱» است؛ زیرا با انتخاب $B=8$ داریم:
$A+B=32/5+8=40/5$

۱۸۳. گزینه ۲

$$\underbrace{t_2,t_5,t_{11}}_{\text{جملات از دنباله‌ی حسابی}}$$

(۱) $\xrightarrow[\text{دنباله‌ی حسابی باز کن}]{\text{همه‌ی جمله‌ها را طبق جمله‌ی عمومی}} \underbrace{t_1+d,t_1+4d,t_1+10d}_{\text{سه جمله‌ی متوالی دنباله‌ی هندسی}}$

$\xrightarrow[\text{رو اعمال کن}]{\text{شرط واسطه‌ی هندسی}} (t_1+4d)^2=(t_1+d)(t_1+10d)$

$\xrightarrow{\text{اتحادها رو پیاده کن}} \cancel{t_1^2}+8t_1d+16d^2=\cancel{t_1^2}+11t_1d+10d^2$

$\xrightarrow{\text{ساده و مرتب کن}} 16d^2-10d^2=11t_1d-8t_1d$

$\Rightarrow 6d^2=3t_1d \xrightarrow{\div 3d} t_1=2d$ (۲)

$\xrightarrow[\text{دنباله‌ی هندسی } t_2,t_5,t_{11}]{\text{(۲) رو در (۱) قرار بده}} 2d+d,2d+4d,2d+10d$

$\xrightarrow{\text{ساده کن}} 3d,6d,12d \xrightarrow[r=2]{\text{جمله‌ی چهارم}} t_4=12d\times 2=24d$

می‌خواهیم ببینیم که $24d$ چندمین جمله از دنباله‌ی حسابی است. فرض کنیم جمله‌ی kاُم از دنباله‌ی حسابی باشد، بنابراین:

$t_k=t_1+(k-1)d \xrightarrow[(2)]{t_k=24d} 24d=2d+(k-1)d$

$\xrightarrow{\div d} 24=2+k-1 \xrightarrow{\text{ساده کن}} 24=k+1 \Rightarrow k=23$

۱۸۴. گزینه ۳ اگر جمله‌ی عمومی دنباله‌ی هندسی را با t'_n و جمله‌ی عمومی دنباله‌ی حسابی را با t_n نمایش دهیم، با توجه به مفروضات تست داریم:

جملات دنباله‌ی هندسی گفته‌شده $\Rightarrow t'_2,t'_4,t'_5 \xrightarrow[\text{قرار بده}]{\text{چهار جمله بین } t'_4, t'_5}$

$t'_2,t'_4,\underbrace{○,○,○,○}_{\text{چهار جمله}},t'_5 \xrightarrow[\text{جملاتش رو بنویس}]{\text{حالا به دنباله‌ی حسابی داری}}$

$$\underset{t'_2}{\underset{\downarrow}{t_1}},\underset{t'_4}{\underset{\downarrow}{t_2}},t_3,t_4,t_5,t_6,\underset{t'_5}{\underset{\downarrow}{t_7}}$$

بنابراین سؤال را می‌توان این‌گونه بیان کرد که جملات اول، دوم و هفتم یک دنباله‌ی حسابی، سه جمله‌ی متوالی یک دنباله‌ی هندسی‌اند؛ قدرنسبت این دنباله‌ی هندسی کدام است؟

طبق نکته‌ی گفته‌شده در درسنامه، اگر جملات ℓاُم، mاُم و nاُم یک دنباله‌ی حسابی تشکیل دنباله‌ی هندسی بدهند، قدرنسبت این دنباله از رابطه‌ی $r=\frac{n-m}{m-\ell}$ به‌دست می‌آید، در اینجا $\ell=1$، $m=2$ و $n=7$؛ بنابراین:

$$r=\frac{n-m}{m-\ell}=\frac{7-2}{2-1}=5$$

۱۸۵. گزینه ۳ الگوی زیر را در نظر می‌گیریم:

مرحله	۱	۲	۳	...	n
شعاع دایره	R	$\frac{R}{2}$	$\frac{R}{4}$	...	$\frac{R}{2^{n-1}}$
مساحت	S_1	S_2	S_3	...	S_n
اندازه‌ی مساحت	πR^2	$\underset{\text{۲ دایره}}{\boxed{2}}\times\pi(\frac{R}{2})^2$	$\underset{\text{۴ دایره}}{\boxed{4}}\times\pi(\frac{R}{4})^2$	...	؟

حال مساحت دایره‌ها را در هر مرحله ساده می‌کنیم:

$$S_1=\pi R^2, S_2=\frac{1}{2}\pi R^2=\frac{1}{2}S_1, S_3=\frac{1}{4}\pi R^2=\frac{1}{2^2}S_1, \dots,$$

$$S_n=\frac{1}{2^{n-1}}S_1$$

۱۸۶. گزینه ۱ زبان ریاضی مسئله، یعنی $t_n<0$ رو حل کن:

$$t_n<0 \xrightarrow{\text{جمله‌ی عمومی رو جایگزین کن}} \frac{n}{81}+(-\frac{1}{3})^n<0$$

اگر n زوج باشد، همه‌ی جملات مثبت خواهند بود. (چرا؟) از طرفی $\frac{1}{81}=(-\frac{1}{3})^4$، پس کافی است جملات اول، سوم و... دنباله را بررسی کنیم:

$t_1=\frac{1}{81}-\frac{1}{3}=\frac{1}{81}-\frac{27}{81}=-\frac{26}{81}$ ✓

$t_3=\frac{3}{81}-\frac{1}{27}=\frac{1}{27}-\frac{1}{27}=0$ غ‌ق‌ق

از جمله‌ی سوم به بعد، همه‌ی جملات مثبت می‌شوند. (چرا؟) پس در این دنباله، فقط جمله‌ی اول منفی است.

۱۸۷. گزینه ۱ تعداد نقاط توپر در هر شکل را به‌صورت یک دنباله می‌نویسیم:
۱،۵،۹،...
مشاهده می‌کنیم که هر جمله با عدد ثابت ۴ جمع می‌شود، پس این دنباله یک دنباله‌ی حسابی است (رد گزینه‌های «۳» و «۴») و قدرنسبت آن هم همان ۴ است. جمله‌ی عمومی این دنباله به‌صورت زیر است:

$t_n=t_1+(n-1)d \xrightarrow[t_1=1,d=4]{t_n=397} 397=1+(n-1)\times 4$

$\xrightarrow{-1} 396=4(n-1) \xrightarrow{\div 4} n-1=99 \Rightarrow n=100$

۱۸۸. گزینه ۱ ابتدا مخرج کسر t_n را گویا می‌کنیم، پس:

$$t_n=\frac{2(\sqrt{n+4}-\sqrt{n+3})}{(\sqrt{n+4}+\sqrt{n+3})(\sqrt{n+4}-\sqrt{n+3})}$$

$$=\frac{2(\sqrt{n+4}-\sqrt{n+3})}{(n+4)-(n+3)} \xrightarrow{\text{ساده کن}} t_n=2(\sqrt{n+4}-\sqrt{n+3})$$

حالا شروع می‌کنیم به نوشتن جمله‌ها و جمع کردن آن‌ها. اگر مجموع ۱۴۰ جمله‌ی اول را با A نمایش دهیم، داریم:

$A=t_1+t_2+t_3+\dots+t_{139}+t_{140}$

$\Rightarrow A=2(\cancel{\sqrt{5}}-\sqrt{4})+2(\cancel{\sqrt{6}}-\cancel{\sqrt{5}})+2(\cancel{\sqrt{7}}-\cancel{\sqrt{6}})+\dots$

$+2(\cancel{\sqrt{143}}-\cancel{\sqrt{142}})+2(\sqrt{144}-\cancel{\sqrt{143}})$

همان‌طور که مشاهده می‌کنید، جملات دوبه‌دو با هم حذف می‌شوند و در پرانتز اولی و آخری جمله‌ای باقی می‌ماند:

$$\Rightarrow A = 2(-\sqrt{4}) + 2(\sqrt{144}) = 2(-2) + 2(12) = -4 + 24 = 20$$

۱۸۹. گزینه ۲ جملات متوالی را t_n و t_{n+1} در نظر می‌گیریم. طبق فرض مسئله داریم:

$$t_{n+1} - t_n = 6 \xrightarrow{t_n = an+b} (a(n+1)+b) - (an+b) = 6$$

$$\xrightarrow{\text{ساده کن}} \cancel{an} + a + \cancel{b} - \cancel{an} - \cancel{b} = 6 \Rightarrow a = 6 \quad \boxed{1}$$

از طرفی، مجموع جملات سوم و پنجم برابر ۵۰ است، یعنی:

$$t_3 + t_5 = 50 \xrightarrow[a=6]{t_n = an+b} 6\times 3 + b + 6\times 5 + b = 50$$

$$\Rightarrow 2b + 18 + 30 = 50 \Rightarrow 2b = 50 - 48 \Rightarrow 2b = 2 \Rightarrow b = 1 \quad \boxed{2}$$

$$\xrightarrow{\boxed{1} \text{ و } \boxed{2}} t_n = 6n + 1 \xrightarrow{n=10} t_{10} = 6\times 10 + 1 = 61$$

۱۹۰. گزینه ۲

$$t_1, t_2, t_3, t_4 :\text{چهار جمله‌ی اول} \xrightarrow{\text{جمع کن}} t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = 15$$

$$\xrightarrow[\text{همه‌ی جمله‌ها رو باز کن}]{t_n = t_1 + (n-1)d} t_1 + (t_1 + d) + (t_1 + 2d) + (t_1 + 3d) = 15$$

$$\xrightarrow{\text{ساده کن}} 4t_1 + 6d = 15 \quad \boxed{1}$$

پنج جمله‌ی بعدی: t_5, t_6, t_7, t_8, t_9

$$\xrightarrow{\text{همه رو جمع کن}} t_5 + t_6 + t_7 + t_8 + t_9 = 30$$

$$\xrightarrow{\text{همه رو باز کن}} (t_1 + 4d) + (t_1 + 5d) + (t_1 + 6d) + (t_1 + 7d)$$

$$+ (t_1 + 8d) = 30 \xrightarrow{\text{ساده کن}} 5t_1 + 30d = 30$$

$$\xrightarrow{\div 5} t_1 + 6d = 6 \quad \boxed{2}$$

$$\xrightarrow{\text{با } \boxed{1} \text{ و } \boxed{2} \text{ دستگاه تشکیل بده}} \begin{cases} 4t_1 + 6d = 15 \\ t_1 + 6d = 6 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{دو معادله رو کم کن}} 4t_1 - t_1 = 15 - 6 \Rightarrow 3t_1 = 9 \Rightarrow t_1 = 3$$

$$\xrightarrow{t_1 + 6d = 6} 3 + 6d = 6 \Rightarrow 6d = 3 \Rightarrow d = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

حالا با $d = \frac{1}{2}$ و $t_1 = 3$ جمله‌ی یازدهم را می‌نویسیم:

$$\xrightarrow{\text{جمله‌ی یازدهم}} t_{11} = t_1 + 10d = 3 + 10(\frac{1}{2}) = 3 + 5 = 8$$

۱۹۱. گزینه ۲ جمله‌ها را می‌توان به‌صورت $a + 2d$ و $a + d$ و a و $a - d$ و $a - 2d$ درنظر گرفت. طبق فرض مسئله، مجموع سهم‌ها برابر ۱۰۰ است، بنابراین:

$$a - 2d + a - d + a + a + d + a + 2d = 100$$

$$\Rightarrow 5a = 100 \Rightarrow a = 20$$

از طرف دیگر اگر $a - 2d$ کوچک‌ترین سهم باشد، آن‌گاه:

$\frac{1}{3}$ (مجموع سه سهم بزرگ‌تر) = مجموع دو سهم کوچک‌تر

$$\Rightarrow \frac{1}{3}(a + a + d + a + 2d) = a - 2d + a - d$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}(3a + 3d) = 2a - 3d \Rightarrow a + d = 2a - 3d \Rightarrow d = \frac{a}{4} = 5$$

پس سهم‌ها به‌صورت زیر هستند:

$$\underset{\text{کوچک‌ترین سهم}}{\underset{\downarrow}{10}}, 15, 20, 25, 30$$

۱۹۲. گزینه ۲ فرض می‌کنیم جمله‌ی عمومی دنباله t_n باشد؛ در این‌صورت $t_n = t_1 r^{n-1}$. طبق فرض مسئله داریم:

$$t_1 = 2$$

$$t_{10} = 20 \xrightarrow{\text{ساده کن}} t_1 r^9 = 20 \xrightarrow{t_1 = 2} 2 \times r^9 = 20 \Rightarrow r^9 = 10 \quad \boxed{*}$$

و اما حاصل‌ضرب ده جمله‌ی اول دنباله:

$$A = t_1 t_2 \dots t_{10} \xrightarrow{\text{جمله‌ها رو باز کن}} A = t_1 (t_1 r)(t_1 r^2) \dots (t_1 r^9)$$

$$\xrightarrow{\text{ساده کن}} A = t_1^{10} r^{(1+2+\dots+9)}$$

$$\xrightarrow{1+2+\dots+9 = \frac{9(9+1)}{2} = 45} A = t_1^{10} r^{45}$$

$$\xrightarrow[t_1 = 2]{\text{با توجه به } \boxed{*}\ r^{45} \text{ را برحسب توان‌های ۹ بنویس}} A = 2^{10} \times (r^9)^5 \xrightarrow{r^9 = 10}$$

$$A = 2^{10} \times 10^5 \xrightarrow{2^{10} = (2^2)^5 = 4^5} A = 4^5 \times 10^5 \Rightarrow A = 40^5$$

۱۹۳. گزینه ۲

$$\underset{\text{سه جمله‌ی دنباله‌ی حسابی}}{\underbrace{a, 4, b}} \xrightarrow{\text{شرط واسطه‌ی حسابی}} 4 = \frac{a+b}{2} \Rightarrow a + b = 8 \quad \boxed{1}$$

$$\underset{\text{۳ جمله‌ی دنباله‌ی هندسی}}{\underbrace{a, 4, 4b}} \xrightarrow{\text{شرط واسطه‌ی هندسی}} 4^2 = a \times 4b \xrightarrow{\div 4} ab = 4 \quad \boxed{2}$$

از رابطه‌ی $\boxed{1}$ مقدار b برابر است با $b = 8 - a$. با قراردادن b در رابطه‌ی $\boxed{2}$ داریم:

$$a(8 - a) = 4 \xrightarrow{\text{ساده کن}} 8a - a^2 = 4 \Rightarrow a^2 - 8a + 4 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{دستور } \Delta} a = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 4\times 1\times 4}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{48}}{2}$$

$$a = \frac{8 \pm \sqrt{16\times 3}}{2} = \frac{8 \pm 4\sqrt{3}}{2} = \frac{2(4 \pm 2\sqrt{3})}{2} \Rightarrow a = 4 \pm 2\sqrt{3}$$

۱۹۴. گزینه ۳

$$4, a, b \xrightarrow[\text{واسطه‌ی هندسی}]{\text{دنباله‌ی هندسی}} a^2 = 4b \quad \boxed{1}$$

$$4, a, b - 1 \xrightarrow[\text{واسطه‌ی حسابی}]{\text{دنباله‌ی حسابی}} a = \frac{4 + b - 1}{2} \Rightarrow 2a = b + 3 \quad \boxed{2}$$

دستگاه شامل رابطه‌های $\boxed{1}$ و $\boxed{2}$ را باید حل کنیم:

$$\xrightarrow[\text{ضرب کن}]{\text{رابطه‌ی } \boxed{2} \text{ را در ۴}} 8a = 4b + 12 \xrightarrow{\boxed{1}} 8a = a^2 + 12$$

$$\xrightarrow{\text{مرتب کن}} a^2 - 8a + 12 = 0 \xrightarrow{\text{تجزیه کن}} (a - 6)(a - 2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 6 \\ a = 2 \end{cases} \xrightarrow[\text{قرار بده}]{\text{در رابطه‌ی } \boxed{1}} \begin{cases} 36 = 4b \Rightarrow b = 9 \\ 4 = 4b \Rightarrow b = 1 \end{cases}$$

۱۹۵. گزینه ۴ طبق نکته‌ی گفته‌شده در درسنامه داریم:

$$t_2, t_5, t_{12} \xrightarrow{\text{اندیس‌ها را به ترتیب بنویس}} 2, 5, 12$$

$$\xrightarrow{\text{بذار تو فرمول}} r = \frac{12 - 5}{5 - 2} = \frac{7}{3}$$

۱۹۶. گزینه ۴ در ناحیه‌ی سوم مختصات، x و y هر نقطه‌ای منفی است؛ بنابراین باید: $x_A < 0$ و $y_A < 0$

$$\begin{cases} x_A = \dfrac{m-3}{m-1} < 0 \xrightarrow{\text{جدول تعیین علامت}} 1 < m < 3 \quad \boxed{1} \\ y_A = m - 2 < 0 \Rightarrow m < 2 \quad \boxed{2} \end{cases}$$

$$\boxed{1} \cap \boxed{2} = (1, 2) \Rightarrow 1 < m < 2 \quad \boxed{3}$$

با توجه به $\boxed{3}$، مختصات نقطه‌ی B را بررسی می‌کنیم:

$$\begin{cases} m > 1 \xrightarrow{-1} \underset{x_B}{\underline{m - 1}} > 0 \Rightarrow x_B > 0 \\ m < 2 \xrightarrow{\text{توان دو}} m^2 < 4 \Rightarrow \underset{y_B}{\underline{m^2 - 4}} < 0 \Rightarrow y_B < 0 \end{cases}$$

بنابراین نقطه‌ی B در ناحیه‌ی چهارم مختصات قرار دارد.