

مقدمهٔ مدیریت تألیف

♦ ما در رقابت با هیچ‌کس جز خودمان نیستیم...
هدف ما مغلوب نمودن آخرین کاری است که انجام داده‌ایم.

مقدمه مؤلفین

■ آینده تبدیل به حال،

حال به گذشته

و گذشته به یک «ندامت جاودانه» تبدیل خواهد شد

اگر در زندگی نقشه‌ای نداشته باشید.

■ تنسی ویلیامز

فهرست ریاضیات دهم

فصل ۱ مجموعه، الگو و دنباله

- درس اول: مجموعه‌های متناهی و نامتناهی ۱۰
- درس دوم: متمم یک مجموعه ۱۶
- درس سوم: الگو و دنباله ۲۳
- درس چهارم: دنباله‌های حسابی و هندسی ۳۰

فصل ۲ مثلثات

- درس اول: نسبت‌های مثلثاتی ۴۶
- درس دوم: دایره مثلثاتی ۵۵
- درس سوم: روابط بین نسبت‌های مثلثاتی ۶۱

فصل ۳ توان‌های گویا و عبارت‌های جبری

- درس اول: ریشه و توان ۷۰
- درس دوم: ریشه n ام ۷۳
- درس سوم: توان‌های گویا ۷۶
- درس چهارم: عبارت‌های جبری ۸۱

فصل ۴ معادله‌ها و نامعادله‌ها

- درس اول: معادله درجه دوم و روش‌های مختلف حل آن ۱۰۰
- درس دوم: سهمی ۱۰۹
- درس سوم: تعیین علامت ۱۱۸

فصل ۵ تابع

- درس اول: مفهوم تابع و بازنمایی‌های آن ۱۳۸
- درس دوم: دامنه و برد توابع ۱۴۴
- درس سوم: انواع تابع ۱۵۶

فهرست حسابان یازدهم

فصل ۱	جبر و معادله
۱۶۶	درس اول: مجموع جملات دنباله‌های حسابی و هندسی
۱۸۴	درس دوم: معادلات درجه دوم
۱۹۸	درس سوم: معادلات گویا و گنگ
۲۱۱	درس چهارم: قدرمطلق و ویژگی‌های آن
۲۲۵	درس پنجم: آشنایی با هندسه تحلیلی
فصل ۲	تابع
۲۴۴	درس اول: آشنایی بیشتر با تابع
۲۴۷	درس دوم: انواع تابع
۲۵۸	درس سوم: وارون تابع
۲۷۴	درس چهارم: اعمال روی توابع
فصل ۳	توابع نمایی و لگاریتمی
۲۹۸	درس اول: تابع نمایی و ویژگی‌های آن
۳۰۷	درس دوم و سوم: لگاریتم
فصل ۴	مثلثات
۳۲۸	درس اول: رادیان
۳۳۲	درس دوم: نسبت‌های مثلثاتی برخی زوایا
۳۴۰	درس سوم: توابع مثلثاتی
۳۵۳	درس چهارم: روابط مثلثاتی مجموع و تفاضل زوایا
فصل ۵	حد و پیوستگی
۳۶۸	درس اول: مفهوم حد و فرآیندهای حدی
۳۷۲	درس دوم: حدهای یک طرفه (حد چپ و حد راست)
۳۸۹	درس سوم: قضایای حد
۳۹۹	درس چهارم: محاسبه حد توابع کسری (حالت $\frac{0}{0}$)
۴۰۸	درس پنجم: پیوستگی

فصل ۱ تابع

- درس اول: تبدیل نمودار توابع ۴۱۶
- درس دوم (بخش ۱): تابع درجه سوم، توابع یکنوا ۴۲۰
- درس دوم (بخش ۲): بخش پذیری و تقسیم ۴۴۱

فصل ۲ مثلثات

- درس اول: تناوب و تانزانت ۴۵۲
- درس دوم: معادلات مثلثاتی ۴۶۵

فصل ۳ حدهای نامتناهی - حد در بی نهایت

- درس اول: حدهای نامتناهی ۴۸۸
- درس دوم: حد در بی نهایت ۵۰۸

فصل ۴ مشتق

- درس اول: آشنایی با مفهوم مشتق ۵۳۰
- درس دوم: مشتق پذیری و پیوستگی ۵۵۹
- درس سوم: آهنگ متوسط تغییر و آهنگ لحظه‌ای تغییر ۵۸۳

فصل ۵ کاربردهای مشتق

- درس اول: اکسترمم‌های یک تابع و توابع صعودی و نزولی ۵۹۰
- درس دوم: جهت تقعر نمودار یک تابع و نقطه عطف آن ۶۲۱
- درس سوم: رسم نمودار تابع ۶۳۳

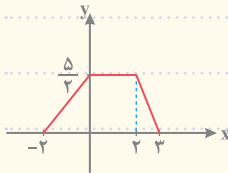


درس اول: تبدیل نمودار توابع

انبساط و انقباض عمودی

TEST 356

اگر نمودار تابع f به صورت مقابل باشد، دامنه و بُرد تابع $y = 2f(x-1) + 1$ در کدام گزینه آمده است؟



(۱) $R_f = [1, 6]$ ، $D_f = [-1, 4]$

(۲) $R_f = [0, 5]$ ، $D_f = [-1, 4]$

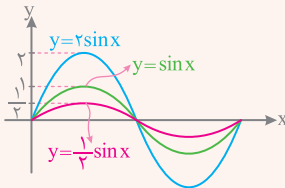
(۳) $R_f = [0, 5]$ ، $D_f = [-2, 3]$

(۴) $R_f = [-1, 4]$ ، $D_f = [1, 6]$

MiniBOX

برای رسم نمودار $y = kf(x)$ ، باید عرض تمام نقاط نمودار تابع $f(x)$ را k برابر کنیم.

اگر $k > 1$ باشد، نمودار در امتداد محور y با ضریب k منبسط (در امتداد محور x فشرده‌تر) می‌شود و اگر $0 < k < 1$ باشد، نمودار در امتداد محور y با ضریب k منقبض (در امتداد محور x بازتر) می‌شود.



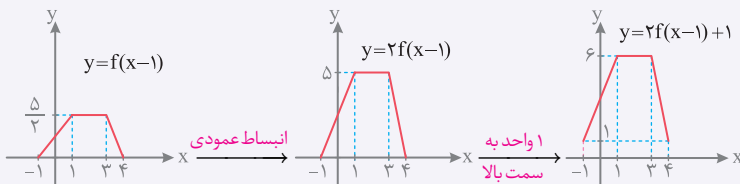
نمودار توابع $y = \frac{1}{2} \sin x$ و $y = \sin x$ ، $y = 2 \sin x$

به صورت مقابل است:

اگر $k < 0$ باشد، ابتدا نمودار $kf(x)$ را با فرض مثبت بودن k رسم و سپس آن را نسبت به محور x قرینه می‌کنیم.

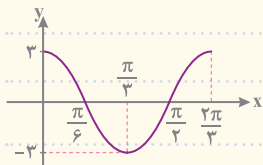
ANALYSE

با توجه به مطالب گفته شده، نمودار تابع $y = 2f(x-1) + 1$ را مرحله به مرحله رسم می‌کنیم:



پاسخ گزینه ۱

نمودار مقابل مربوط به کدام تابع است؟



(۱) $y = 3 \cos 3x$

(۲) $y = \frac{1}{3} \cos 3x$

(۳) $y = \frac{1}{3} \cos \frac{x}{3}$

(۴) $y = 3 \cos \frac{x}{3}$

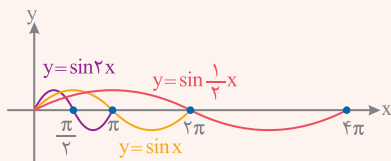
MiniBOX

🍏 برای رسم نمودار $y = f(kx)$ ، باید طول تمام نقاط $f(x)$ را $\frac{1}{k}$ برابر کنیم.

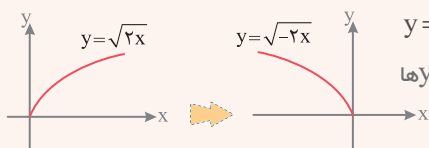
🍏 اگر $k > 1$ باشد، نمودار در امتداد محور x ها با ضریب $\frac{1}{k}$ منقبض می‌شود و اگر $0 < k < 1$

باشد، نمودار در امتداد محور x ها با ضریب $\frac{1}{k}$ منبسط می‌شود.

🍏 نمودار توابع $y = \sin 2x$ و $y = \sin x$ ، $y = \sin \frac{1}{3}x$ در نمودار زیر رسم شده‌اند:



🍏 اگر $k < 1$ باشد، ابتدا نمودار $f(kx)$ را با فرض مثبت بودن k رسم می‌کنیم و سپس آن را نسبت به محور y ها قرینه می‌کنیم.



🍏 برای رسم $y = \sqrt{-2x}$ ، ابتدا نمودار $y = \sqrt{2x}$ را رسم می‌کنیم و سپس آن را نسبت به محور y ها قرینه می‌کنیم:

ANALYSE

🍏 در نمودار تابع $y = \cos x$ ، اگر عرض تمام نقاط ۳ برابر و طول‌ها $\frac{1}{3}$ برابر شود، به نمودار داده شده در سؤال می‌رسیم. ضابطه تابع به صورت $y = 3 \cos 3x$ خواهد بود.

پاسخ گزینه ۱

بررسی نمودار $y = f(ax + b)$ با داشتن نمودار $f(x)$

TEST 358

نمودار تابع $y = f(x)$ مفروض است. ابتدا نمودار را ۴ واحد در راستای محور x ها به سمت راست منتقل می کنیم، سپس آن را با ضریب ۳ در راستای افقی منبسط می کنیم و در انتها آن را ۲ واحد در راستای عمودی به سمت پایین منتقل می کنیم. ضابطه تابع به دست آمده کدام است؟

$$y = 4 + f\left(\frac{x}{3} - 2\right) \quad (۴) \quad y = -2 + f\left(\frac{x}{3} - 4\right) \quad (۳) \quad y = 4 + f(3x - 2) \quad (۲) \quad y = -2 + f(3x - 4) \quad (۱)$$

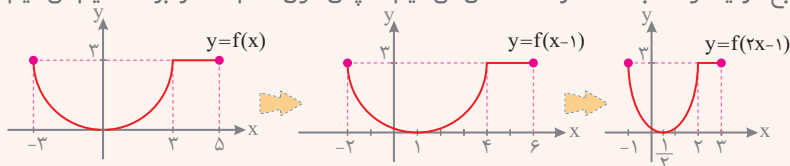
MiniBOX

1 برای رسم نمودار تابع $y = f(ax + b)$ با کمک نمودار تابع $y = f(x)$ ، به ترتیب زیر عمل می کنیم:

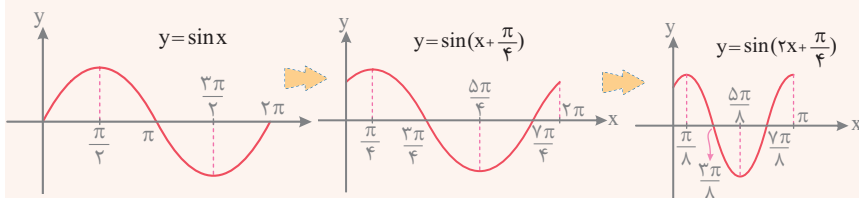
با توجه به علامت b ، نمودار $y = f(x)$ را به اندازه b واحد در راستای افقی جابه جا می کنیم.

2 طول تمام نقاط نمودار را بر a تقسیم می کنیم.

3 نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت زیر است. برای رسم نمودار تابع $y = f(2x - 1)$ ، ابتدا نمودار تابع f را یک واحد به سمت راست منتقل می کنیم. سپس طول تمام نقاط را بر ۲ تقسیم می کنیم:



4 برای رسم نمودار تابع $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ ، ابتدا نمودار تابع $y = \sin x$ را به اندازه $\frac{\pi}{4}$ به سمت چپ منتقل می کنیم، سپس طول تمام نقاط را بر ۲ تقسیم می کنیم:



ANALYSE

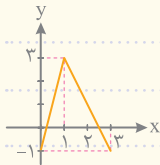
تغییرات را مرحله به مرحله بر روی ضابطه تابع f اعمال می کنیم:

$$y = f(x) \xrightarrow[\text{سمت راست}]{\text{۴ واحد به}} y = f(x - 4) \xrightarrow[\text{در راستای افقی}]{\text{انبساط با ضریب ۳}} y = f\left(\frac{1}{3}x - 4\right) \xrightarrow[\text{به سمت پایین}]{\text{۲ واحد}} y = -2 + f\left(\frac{1}{3}x - 4\right)$$

پاسخ گزینه ۳

بررسی نمودار تابع $y = f(x)$ با داشتن نمودار $y = f(ax + b)$

TEST 359



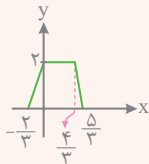
نمودار تابع $y = 1 + f(2x - 1)$ مطابق شکل است. نمودار $y = f(x)$ از کدام

ناحیه نمی‌گذرد؟

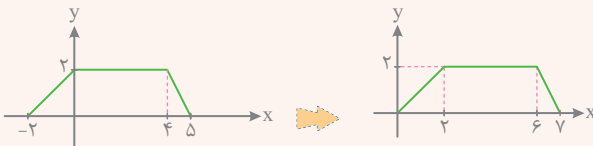
- (۱) اول (۲) دوم (۳) سوم (۴) چهارم

MiniBOX

برای رسم نمودار تابع $y = f(x)$ ، از روی نمودار $y = f(ax + b)$ ابتدا طول تمام نقاط نمودار را در a ضرب می‌کنیم تا به نمودار تابع $y = f(x)$ برسیم. سپس اگر $b > 0$ باشد، نمودار را به اندازه b واحد به سمت راست و اگر $b < 0$ باشد، نمودار را به اندازه b واحد به سمت چپ منتقل می‌کنیم.

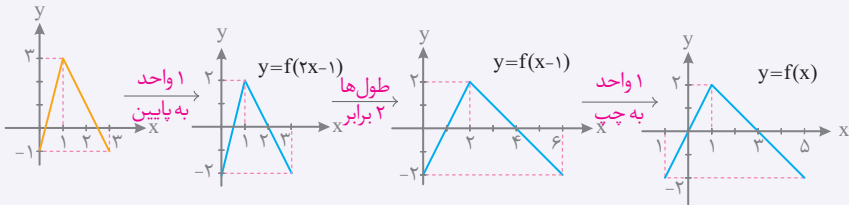


نمودار تابع $y = f(3x + 2)$ به صورت مقابل است. برای رسم نمودار تابع $y = f(x)$ ، ابتدا طول تمام نقاط را در ۳ ضرب می‌کنیم و سپس نمودار حاصل را ۲ واحد به سمت راست منتقل می‌کنیم:



ANALYSE

باید نمودار $y = f(x)$ را رسم کنیم. برای این منظور، ابتدا نمودار تابع $y = 1 + f(2x - 1)$ را یک واحد در راستای عمودی به سمت پایین منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع $y = f(2x - 1)$ به دست آید. سپس طول تمام نقاط را ۲ برابر می‌کنیم و در انتها نمودار را به اندازه یک واحد به سمت چپ منتقل می‌کنیم:



بنابراین نمودار تابع از ناحیه دوم نمی‌گذرد.

پاسخ گزینه ۲

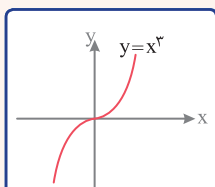
کدام تابع اکیداً صعودی است؟

 (۱) $y = -x^2$ (۲) $y = x^2$ (۳) $y = x^3$ (۴) $y = -x^3$

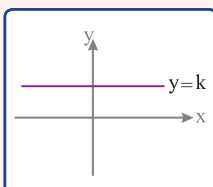
MiniBOX

در سؤالاتی که ضابطه تابع داده می‌شود، بهترین راه برای تشخیص یکنوایی تابع، رسم نمودار تابع است. 🍏

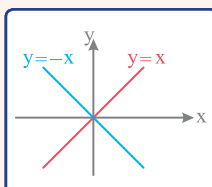
نمودار همه توابع مهم کتاب درسی، که باید برای تشخیص یکنوایی به خاطر داشته باشید در جدول زیر آورده شده است. در این نمودارها، قسمت‌های **صعودی** با رنگ **قرمز** و قسمت‌های **نزولی** با رنگ **آبی** مشخص شده است. 🍏



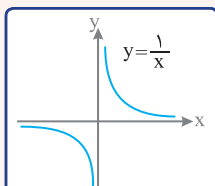
تابع $y = x^3$ تابعی
اکیداً صعودی است.



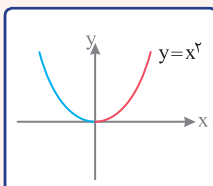
تابع $y = c$ ، تنها تابعی
است که هم صعودی و
هم نزولی می‌باشد.



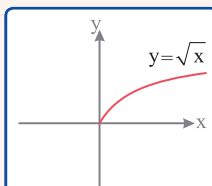
تابع $y = x$ اکیداً صعودی
است.
تابع $y = -x$ اکیداً نزولی
است.



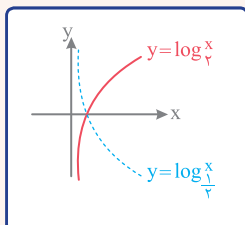
تابع در هر یک از بازه‌های
 $(0, +\infty)$ و $(-\infty, 0)$
اکیداً نزولی است. اما در
 \mathbb{R} غیر یکنوا است.



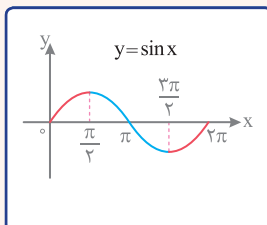
تابع در بازه $[0, +\infty)$
اکیداً صعودی است.
تابع در بازه $(-\infty, 0]$
اکیداً نزولی است.



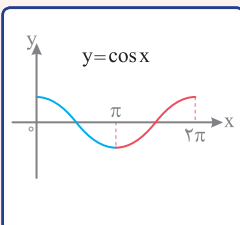
تابع $y = \sqrt{x}$
اکیداً صعودی است.



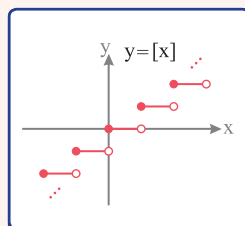
برای مبنای بزرگ‌تر از یک، تابع اکیداً صعودی است. برای مبنای بین ۰ و ۱، تابع اکیداً نزولی است.



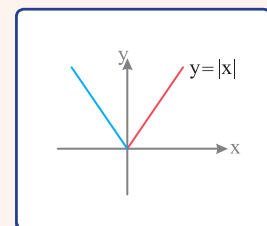
تابع در بازه $[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}]$ اکیداً نزولی است. تابع در بازه‌های $[0, \frac{\pi}{3}]$ و $[\frac{3\pi}{3}, 2\pi]$ اکیداً صعودی است.



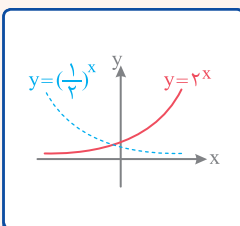
تابع در بازه $[0, \pi]$ اکیداً نزولی است. تابع در بازه $[\pi, 2\pi]$ اکیداً صعودی است.



تابع صعودی است.



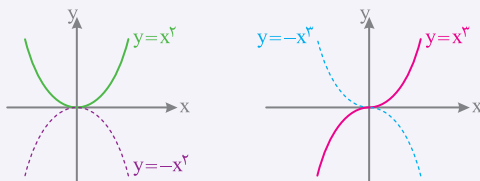
تابع در بازه $[0, +\infty)$ اکیداً صعودی است. تابع در بازه $(-\infty, 0]$ اکیداً نزولی است.



برای پایه بزرگ‌تر از یک، تابع اکیداً صعودی است. برای پایه بین صفر و یک، تابع اکیداً نزولی است.

ANALYSE

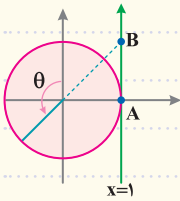
با توجه به نمودار توابع، واضح است تابع $y = x^2$ تابعی اکیداً صعودی است:





تانژانت و تغییرات آن

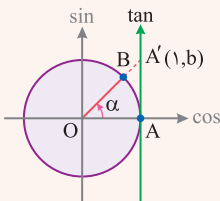
TEST 394



با توجه به دایره مثلثاتی مقابل، طول پاره خط AB کدام است؟

- (۱) $\tan \theta$ (۲) $-\tan \theta$
 (۳) $\frac{1}{\tan \theta}$ (۴) $-\frac{1}{\tan \theta}$

MiniBOX



محور تانژانت همان خط $x=1$ است که بر دایره مثلثاتی، مماس شده است. برای پیدا کردن تانژانت زاویه α ، شعاع OB را امتداد می‌دهیم تا محور تانژانت را قطع کند. تانژانت زاویه α برابر b است.

مقدار تانژانت در هر چهار ربع دایره مثلثاتی همواره در حال افزایش است. نحوه تغییرات تانژانت در ربع‌های مختلف به صورت زیر است:

تغییرات	دایره مثلثاتی	بازه	ربع
مقدار تانژانت از $-\infty$ تا $+\infty$ افزایش می‌یابد.		$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$	اول
مقدار تانژانت از $+\infty$ تا $-\infty$ افزایش می‌یابد.		$\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$	دوم



تغییرات	دایره مثلثاتی	بازه	ربع
مقدار تانژانت از ۰ تا $+\infty$ افزایش می‌یابد.		$\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$	سوم
مقدار تانژانت از $-\infty$ تا ۰ افزایش می‌یابد.		$\frac{3\pi}{2} \leq x \leq 2\pi$	چهارم

ANALYSE

با توجه به شکل، امتداد زاویه $\theta + \frac{\pi}{4}$ محور تانژانت را در نقطه B قطع کرده است، پس

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) = AB$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) = -\cot\theta \Rightarrow AB = -\cot\theta = -\frac{1}{\tan\theta}$$

[توجه کنید که $90^\circ < \theta < 180^\circ$ است، پس $\tan\theta < 0$ ؛ بنابراین $-\frac{1}{\tan\theta}$ مقداری مثبت است و با

مثبت بودن AB در تناقض نیست.]

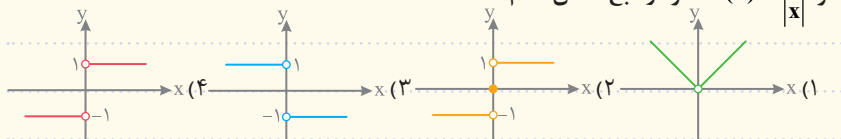
پاسخ گزینه ۴



نمودار تابع مشتق

TEST 489

اگر $f(x) = \frac{x^2}{|x|}$ ، نمودار تابع مشتق کدام است؟

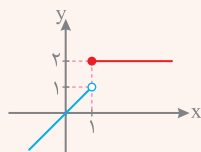


MiniBOX

برای رسم نمودار تابع مشتق f به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

ابتدا نقاط مشتق ناپذیر تابع f را پیدا می‌کنیم تا دامنه تابع مشتق مشخص شود.

از تابع f مشتق می‌گیریم و نمودار تابع f' را در دامنه به دست آمده رسم می‌کنیم.

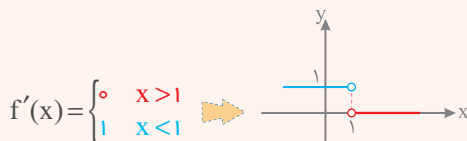


اگر $f(x) = \begin{cases} 2 & x \geq 1 \\ x & x < 1 \end{cases}$ باشد، برای رسم نمودار تابع f' ، ابتدا نمودار

تابع f را رسم می‌کنیم تا نقاط مشتق ناپذیر آن مشخص شود:

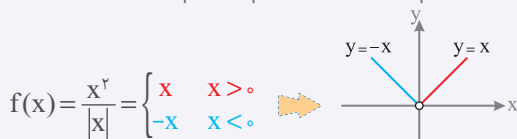
چون تابع در $x=1$ ناپیوسته است، پس در این نقطه مشتق ناپذیر بوده و نقطه $x=1$ در دامنه

تابع مشتق وجود ندارد:

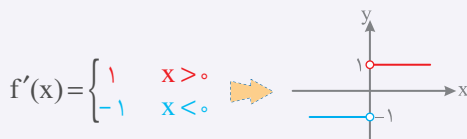


ANALYSE

ابتدا تابع f را به صورت دو ضابطه‌ای می‌نویسیم و نمودار آن را رسم می‌کنیم:



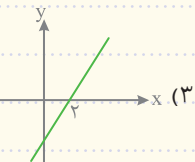
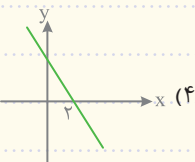
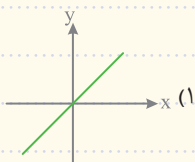
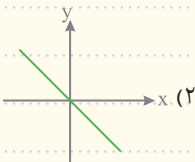
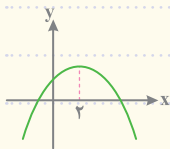
بنابراین نمودار f' به صورت مقابل است:



رابطه بین نمودارهای f و f'

TEST 490

نمودار تابع f به صورت مقابل است. نمودار f' کدام می تواند باشد؟



MiniBOX

در جدول زیر، ارتباط بین نمودار توابع معروف با نمودار تابع مشتق آن ها بیان شده است:

تابع f		تابع f'	
ویژگی	نمودار	ویژگی	نمودار
همواره صعودی		همواره مثبت	
همواره نزولی		همواره منفی	
ابتدا نزولی سپس صعودی		ابتدا منفی سپس مثبت	